
Digitized by Google


LEGATORIA
in
NAPOLI
BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
F
50







MÉMOIRE

SUR LA

DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS ABSOLUES

DANS LES

ELLIPSES D'UNE EXCENTRICITÉ ET D'UNE INCLINAISON QUELCONQUES

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

MÉMOIRE

SUR LA

DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS ABSOLUES

DANS LES

ELLIPSES D'UNE EXCENTRICITÉ ET D'UNE INCLINAISON QUELCONQUES;

Par M. HANSEN,

Directeur de l'Observatoire de Gotha,

TRADUIT DE L'ALLEMAND

PAR M. VICTOR MAUVAIS,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, 55.

1845

MÉMOIRE

SUR LA

DÉTERMINATION DES PERTURBATIONS ABSOLUES DANS DES ELLIPSES D'UNE EXCENTRICITÉ ET D'UNE INCLINAISON QUELCONQUES;

PAR M. HANSEN,
Directeur de l'Observatoire de Gotha.

(Traduit de l'allemand par M. VICTOR MAUVAIS, Astronome adjoint du Bureau des Longitudes.)

PREMIÈRE PARTIE, *contenant, comme exemple, le calcul des perturbations absolues de la comète de Encke produites par Saturne.*

INTRODUCTION.

La détermination théorique des lieux des anciennes planètes et des satellites s'obtient, comme on sait, au moyen d'expressions qui donnent les coordonnées polaires en fonction du temps. Si l'on calcule, une fois pour toutes, ces expressions avec une exactitude suffisante, le calcul du lieu d'une planète ou d'un satellite n'exige plus d'autre travail que celui de la substitution d'une valeur particulière du temps dans les formules, et ce travail est encore singulièrement facilité par l'emploi de Tables qui ont été calculées dans ce but. Les méthodes qui servent à développer et à calculer les expressions des coordonnées polaires en fonction du temps sont maintenant si connues, qu'en les appliquant on peut arriver au résultat avec toute l'exactitude désirable. Ainsi, à l'égard de ces corps célestes, on peut dire, dans le sens le plus étendu du mot, que le problème de la détermination de leurs orbites est résolu. Il n'en est pas de même des nouvelles planètes et des comètes. Jusqu'ici il n'y a aucune méthode mathématique, aucune règle ou formule d'après lesquelles on puisse exprimer (avec quelque avantage) leurs coordonnées héliocentriques ou leurs éléments elliptiques en fonction du temps, considéré comme variable indépendante. On n'a même pas cherché à résoudre le problème sous ce point de vue (du moins rien n'a été publié sur ce sujet). La méthode dont les astronomes se servent

pour déterminer les lieux de ces corps célestes est toute différente. Ils emploient, pour cela, des expressions mathématiques qui donnent les changements qu'éprouvent les éléments elliptiques, par l'attraction des planètes, pendant un temps très-court. Lorsque, par la substitution des valeurs numériques convenables dans ces expressions, on a calculé les changements des éléments elliptiques, pendant un nombre suffisant de petits intervalles de temps qui se suivent, on obtient par l'espèce de sommation connue sous le nom de *quadrature mécanique*, les changements quelconques des éléments qui peuvent avoir eu lieu pendant tout l'intervalle, jusqu'au temps pour lequel on a établi ces calculs, et l'on peut ainsi calculer les coordonnées de la planète ou de la comète pour ce même temps.

On ne doit pas considérer cette méthode comme ayant été, d'après des considérations théoriques, reconnue préférable pour cette classe de corps célestes ; elle est employée uniquement parce qu'il n'existe jusqu'ici aucun procédé à l'aide duquel on puisse (à cause de la grandeur des excentricités et des inclinaisons des orbites) exprimer les coordonnées des nouvelles planètes et des comètes en fonction du temps, considéré comme variable indépendante. Aussi trouve-t-on, dans les Traités d'astronomie et de mathématiques, des passages d'où il paraît résulter que la solution de ce problème est regardée comme impossible par quelques auteurs.

Cependant cette solution serait d'autant plus désirable que la méthode que l'on suit encore pour les nouvelles planètes et pour les comètes, *si on la compare à l'autre*, porte avec elle des imperfections et des inconvénients essentiels, quelque amélioration qu'elle ait reçue *en elle-même* par les efforts des géomètres les plus distingués de ce siècle. Une de ses imperfections les plus importantes, c'est que l'on ne peut déterminer le lieu d'un corps céleste sans un calcul préalable très-long, qui doit se répéter de période en période ; et quand même l'astre n'aurait pas été observé dans une ou plusieurs de ces périodes, on ne pourrait pas néanmoins les laisser de côté dans le calcul ; ainsi, lorsque l'on a deux ou plusieurs observations éloignées les unes des autres, on ne peut les lier entre elles qu'en étendant le calcul à toutes les périodes intermédiaires; tandis que, si les coordonnées de ces corps célestes étaient exprimées en fonction du temps, considéré comme variable indépendante, on pourrait lier entre elles des observations, quelque rapprochées ou quelque éloignées qu'elles fussent les unes des autres, et cela par un travail très-peu étendu en comparaison du précédent. Il est vrai que ce calcul des expressions des coordonnées en fonction du temps exigerait un travail complétement exécuté à l'avance, mais il suffirait de le faire une fois pour toutes ; tandis que l'autre calcul, qu'il faut répéter de période en période, n'a jamais de fin. Du reste, si l'on considère cette même méthode (des quadra-

tures) sous le rapport pratique, on voit que deux ou plusieurs observations très-éloignées l'une de l'autre ne peuvent être liées entre elles avec la même précision que si elles étaient rapprochées : car, plus les observations que l'on veut rattacher les unes aux autres sont éloignées, plus il y a de termes dans les sommes qui lient les éléments elliptiques des diverses époques. Dans chaque terme, le dernier ou même les derniers chiffres, sont inexacts pour des causes que l'on connaît; les sommes doivent donc être d'autant plus inexactes qu'elles contiennent plus de termes. Théoriquement, on pourrait dans chaque cas remédier à ce dernier genre d'inexactitude : il suffirait d'augmenter convenablement, dans le calcul de chaque terme, le nombre de chiffres décimaux. Mais bientôt ce moyen cesse d'être praticable, car les calculs deviennent d'une insurmontable longueur. En effet, il faudrait d'abord employer des Tables de logarithmes à un plus grand nombre de chiffres décimaux; en second lieu, il faudrait faire les intervalles de temps plus courts, ce qui augmenterait encore le nombre des termes dont se composent les sommes dont nous avons parlé plus haut. Il est vrai que cette augmentation n'a, en résumé, que peu d'influence sur l'inexactitude des *sommes;* car, en diminuant les intervalles de temps, on diminue en même temps le facteur exprimant la différentielle du temps qui doit multiplier chaque terme; en troisième lieu, il faudrait, à cause des termes provenant des carrés et des produits des forces perturbatrices, changer plus souvent les éléments elliptiques employés dans le calcul. Dans les cas où les perturbations sont très-considérables, il faut mettre la plus grande concordance dans les changements des éléments elliptiques qui servent de fondement au calcul, car dans le développement des différentes parties dont chaque terme se compose, les termes provenant des carrés et des produits des forces perturbatrices sont souvent tels, qu'ils se compensent presque complétement dans les *sommes*. Si l'on n'a pas suivi une marche rigoureusement concordante dans les changements simultanés des éléments servant de fondement au calcul, il pourra arriver que, dans le résultat, les parties dont nous venons de parler ne se compensent pas exactement, et que, par conséquent, ce résultat ne soit inexact. Le seul moyen de remédier à cette circonstance est de calculer deux fois quelques-unes des différentielles des éléments, pour chacun des instants où l'on doit faire ce changement simultané, savoir : une première fois avec les éléments employés jusque-là, et une seconde fois avec les éléments modifiés, tels qu'ils doivent être employés pour la suite, jusqu'à ce que la différence des résultats obtenus de cette manière soit assez petite pour pouvoir être négligée. Ce double calcul augmente d'autant plus le travail, que l'on est plus souvent obligé de changer ainsi simultanément les éléments.

De toutes ces circonstances il résulte que, par la méthode dont nous parlons, il est pratiquement impossible de lier ensemble, avec une exactitude suffisante,

deux époques très-éloignées l'une de l'autre; tandis que, par la méthode qui se fonde sur l'emploi des termes périodiques des perturbations, on obtient le lieu d'un corps céleste avec une égale exactitude, quelque éloigné que soit le temps pour lequel on calcule ce lieu, soit à partir du moment actuel, soit à partir d'une époque fixe. Quant aux termes qui sont multipliés par le temps lui-même, c'est-à-dire les variations séculaires, leur incertitude va sans doute en croissant avec le temps, mais dans une mesure bien moindre qu'avec l'autre méthode. On peut, avec assez peu de travail, calculer les variations séculaires avec une exactitude telle que, par exemple, l'erreur sur le lieu d'un corps céleste, dans l'intervalle de mille ans avant ou après l'époque fixe, ne s'élève pas à une seconde, et par conséquent la somme totale des perturbations comprises dans cet intervalle sera théoriquement exacte à cette grandeur près. Dans l'autre méthode, au contraire, on ne pourrait certainement pas éviter une inexactitude plus grande pour un intervalle bien moindre.

Une circonstance est encore à remarquer : dans le calcul des perturbations par les quadratures, les perturbations de l'élément elliptique que l'on appelle époque de la longitude moyenne, ou anomalie moyenne, paraissent généralement beaucoup plus grandes qu'elles ne le sont en effet. Cette circonstance vient de ce que la double intégration que le calcul des perturbations de cet élément exige, donne lieu à un terme proportionnel au temps, et dont la valeur numérique, par le calcul même et non par le fait du calculateur, se confond avec la valeur numérique des termes périodiques, et, ainsi réunie, se présente dans le résultat comme une seule et même grandeur numérique. Ce terme se soustrait ensuite de lui-même dans la valeur du moyen mouvement lorsque l'on détermine les éléments purement elliptiques au moyen des observations; en sorte que la vraie valeur du moyen mouvement d'un corps céleste se compose de la réunion, du moyen mouvement que l'on nomme purement elliptique, de ses perturbations, et du terme proportionnel au temps dont nous venons de parler et qui est implicitement contenu dans les perturbations de l'époque.

Lorsque ce terme est considérable, il exerce une influence nuisible sur le calcul des perturbations; car il rend les nombres plus grands numériquement et oblige ainsi à employer, dans le calcul, des logarithmes avec un plus grand nombre de décimales. Il amène ensuite de plus grands changements dans les perturbations que l'on obtient, ce qui fait que l'on est obligé de changer encore plus souvent les éléments, base du calcul; il est cause, en un mot, que les termes dépendants des carrés et des produits des forces perturbatrices paraissent plus grands qu'ils ne le sont en effet.

Toutes ces choses réunies faisaient desirer que l'on pût trouver une methode au moyen de laquelle il fût possible d'exprimer en fonction du temps consi-

déré comme variable indépendante, les coordonnées hélioeentriques des petites planètes et des comètes dont on connaît le temps de la révolution, comme on le fait pour les anciennes planètes et pour les satellites.

M. Bessel (*Astr. nachr.*, tome XIV) a montré comment, *pour un point isolé* d'une orbite de comète, dans le cas où le rayon vecteur de la comète serait beaucoup plus grand que celui de la planète troublante, on pourrait calculer les perturbations de cette comète sans recourir aux quadratures mécaniques; et M. Airy a eu l'idée d'exprimer les perturbations, pour une portion déterminée de l'orbite, par des intégrales définies. Jusqu'ici on avait donc montré comment, pour un point isolé ou pour une portion déterminée d'une orbite de comète, on pouvait éviter l'emploi de la méthode des quadratures mécaniques; mais le problème d'exprimer les coordonnées d'une comète en fonction du temps, ou de donner les perturbations *absolues* de cette comète pour tous les points de son orbite, n'a jamais été résolu.

Tout ce que l'on possédait jusqu'ici pour la solution de ce problème se trouve dans le célèbre Mémoire de M. Gauss, intitulé *Determinatio attractionis, etc.* L'auteur y donne une élégante méthode au moyen de laquelle on peut calculer ceux des termes du premier ordre, par rapport à la force perturbatrice, dont dépendent les variations séculaires, quelle que soit d'ailleurs la grandeur de l'excentricité et de l'inclinaison, pourvu que l'excentricité soit moindre que l'unité; en d'autres termes, pourvu que ce soit une ellipse. Cependant, malgré cet avantage, on ne peut pas nier qu'il restait encore une grande lacune à remplir; car, outre les variations séculaires, on a besoin de connaître encore des termes périodiques beaucoup plus considérables, soit pour leur nombre, soit pour leur grandeur, et notamment dans le cas que nous traitons ici. Il faut d'ailleurs, pour arriver au résultat que l'on veut atteindre, pouvoir, dans l'un et l'autre cas, calculer les termes qui dépendent des carrés et des puissances supérieures des masses.

Je remarquerai ici que si l'on demandait simplement une solution quelconque du problème, abstraction faite de son utilité, on pourrait déjà la déduire de la méthode que j'ai employée dans mon Mémoire couronné, sur les perturbations réciproques de Jupiter et de Saturne; car on peut démontrer que les séries infinies qui y sont employées sont convergentes, quelle que soit la grandeur de l'excentricité elliptique et de l'inclinaison. Par conséquent, cette méthode, sans aucun changement, peut s'appliquer à un corps céleste dont l'orbite aurait une excentricité elliptique et une inclinaison quelconques. Mais lorsque ces éléments sont un peu grands, la convergence des séries devient très-petite, et il faudrait calculer un très-grand nombre de termes pour obtenir un résultat suffisamment exact. Déjà pour Junon, dont l'excentricité est d'environ $\frac{1}{4}$ et dont l'inclinaison sur l'écliptique est d'à peu près 13 degrés, ou bien pour

Pallas, dont l'excentricité est aussi d'environ $\frac{1}{4}$ et dont l'inclinaison est de près de 33 degrés, le nombre des termes à calculer d'après cette méthode deviendrait très-grand, le calcul démesurément long, et leur emploi ultérieur très-pénible et très-difficile. Pour toutes les comètes dont l'excentricité est comme celle de Encke, $= 0,84$, ou bien comme celle de Halley, $= 0,97$, le nombre des termes des perturbations serait si considérable, qu'il faudrait absolument renoncer à les calculer.

Cette méthode est donc, quoique possible en théorie, inapplicable dans la pratique.

Enfin, je suis arrivé à une méthode qui permet de calculer les perturbations absolues (c'est-à-dire en fonction du temps pris pour variable indépendante) d'un corps céleste dont l'orbite aurait une excentricité elliptique et une inclinaison quelconques Cette méthode est simple, et elle conduit, du moins dans tous les cas où je l'ai déjà appliquée, à des séries fortement convergentes. Je puis admettre qu'elle donne dans tous les cas une convergence aussi forte, ou du moins, à peu près aussi forte que le comporte la nature des choses. Il est clair que la même convergence ne peut pas toujours avoir lieu. La méthode se divise en deux *cas*, suivant que le rayon vecteur du corps troublé est plus petit ou plus grand que celui du corps troublant. Le premier cas, dont je m'occuperai d'abord, est, eu égard à la pratique, le plus important; il comprend les perturbations les plus considérables qui aient lieu dans notre système solaire; il comprend les perturbations que les quatre nouvelles planètes, que la comète de Encke et celle de Biela éprouvent de la part de Jupiter et de Saturne. Les petites perturbations qu'Uranus exerce sur le mouvement de ces corps célestes appartiennent au même cas. Les perturbations que la comète de Halley éprouve de la part de Jupiter, Saturne et Uranus, rentrent aussi essentiellement dans ce cas. J'ai déjà terminé, comme *premier exemple* de l'application de cette méthode, le calcul des perturbations de la comète de Encke provenant de l'action de Saturne; or ce calcul a pu être exécuté entièrement en moins de dix jours, savoir, huit jours pour le calcul des perturbations de la longitude et du rayon vecteur, et moins de deux jours pour le calcul des perturbations de la latitude. J'ai aussi commencé le calcul des perturbations de cette même comète, causées par Jupiter; je l'ai même poussé assez loin pour avoir déjà une idée nette de la nature du résultat et de la possibilité d'appliquer la méthode. Les perturbations provenant de l'action de Jupiter sont naturellement plus longues à calculer que celles qui proviennent de Saturne, parce que sa masse est plus grande et que d'ailleurs la comète peut passer plus près de Jupiter que de Saturne. Ces circonstances se manifestent dans les résultats du calcul (dans les coefficients des perturbations), en ce que les coefficients sont plus considérables et que l'on est obligé d'employer un plus grand nombre

de multiples de l'anomalie moyenne de la planète troublante; car, comme on le verra plus bas, pour les perturbations de Saturne il suffit d'aller jusqu'à six fois l'anomalie de Saturne, tandis que pour celles de Jupiter, il faut aller jusqu'à douze fois, et même peut-être jusqu'à quatorze fois l'anomalie moyenne de cette planète.

Les coefficients importants des perturbations sont quelquefois aussi nombreux que ceux qui, dans le mouvement de la Lune, proviennent de l'attraction du soleil; mais ils sont moins considérables. Dans les perturbations de la Lune, le plus grand coefficient s'élève à 4470 secondes, tandis que le plus grand coefficient des perturbations de Jupiter sur la comète de Encke ne va qu'à 2480 secondes. Les variations séculaires de son excentricité sont petites; mais Jupiter produit dans la ligne des absides de cette comète un mouvement qui s'élève à plus d'une demi-minute par an (*).

Le principe fondamental sur lequel repose ma méthode a pour but d'éviter les séries infinies ordonnées d'après les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison. On prévoit bien que de pareilles séries, qui devraient servir à exprimer les perturbations dans tous les cas, deviendraient très-peu convergentes pour de grandes excentricités et de grandes inclinaisons, et que, dans l'application, les perturbations obtenues par ce moyen ne pourraient pas servir; tandis que, d'après le principe fondamental dont nous avons parlé plus haut, les perturbations prennent une forme qu'elles n'avaient jamais eue jusqu'ici : il en résulte que la fonction perturbatrice doit être développée en une série dont les termes sont multipliés par $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(iu+i'f')$, i et i' étant des nombres entiers, u l'*anomalie excentrique* de l'astre inférieur, et f' l'*anomalie vraie* de l'astre supérieur. Les perturbations elles-mêmes ont par conséquent la même forme.

A cause de la petite excentricité de celles des planètes de notre système solaire qui peuvent exercer une force perturbatrice un peu considérable, il n'est pas indispensable d'éviter la série infinie ordonnée d'après les puissances de leur excentricité; il est, au contraire, avantageux de conserver ces séries, parce qu'elles facilitent beaucoup l'intégration, sans nuire toutefois essentiellement à la convergence des perturbations. Le terme général de la fonction pertur-

(*) Comme Pallas et Junon ne peuvent pas approcher de Jupiter aussi près que la comète de Encke, et que leur excentricité est beaucoup plus petite que celle de cette comète, les perturbations que ces planètes éprouvent de la part de Jupiter, si on les calcule d'après la même méthode, seront encore beaucoup plus simples que celles de la comète. J'ai donc donné par là une solution applicable, de la question proposée en 1811 par l'Académie des Sciences de Paris avec un prix double, et qui était restée jusqu'ici sans être résolue.

batrice et des perturbations elles-mêmes dont nous venons de parler, prend alors une forme un peu différente. Dans le cas où le rayon vecteur de l'astre troublé est plus petit que celui de la *planète* troublante, il est multiplié par $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(iu+i'g')$, et, dans le cas contraire, par $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(if+i'g')$, g' étant l'anomalie moyenne de la planète troublante.

Le choix des coordonnées n'est pas non plus indifférent, car cela pourrait nuire au principe fondamental dont nous venons de parler. Il est clair que dans le cas qui nous occupe, il faut prendre les coordonnées dont l'emploi m'a conduit, dans la théorie de la Lune et des planètes, à des séries plus convergentes et à des expressions plus simples.

L'intégration des différentielles des perturbations auxquelles on arrive, et que l'on ramène à la forme que nous venons d'indiquer, conduit à l'intégration d'un système d'équations aux différences finies. L'intégration de certains systèmes de pareilles équations aux différences a déjà été traitée d'une manière générale par Laplace, Lagrange et Poisson; mais, pour le cas qui nous occupe, l'intégration de ces équations doit être traitée d'une manière particulière. En général, l'intégration conduit, soit à des fractions continues, soit à des transcendantes parmi lesquelles celles si connues dans différentes branches des sciences naturelles, et que l'on désigne par I^{i}_{i}, jouent un rôle très-important. Un complet développement des propriétés de ces transcendantes n'a encore été donné, que je sache, nulle part; on ne le trouvera pas ici non plus: j'ai voulu seulement développer celles de ces propriétés qui doivent nous être utiles. Il est remarquable que le calcul des facteurs propres à rendre intégrables les formes d'équations désignées plus haut, peut se faire de plusieurs manières. On trouvera trois manières différentes pour la forme $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(iu+i'g')$; et pour la forme $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(if+i'g')$, qui est un peu plus difficile à traiter, je n'ai pas trouvé moins de dix méthodes différentes, dont quelques-unes, il est vrai, ne sont pas praticables.

J'ai traité, dans la première partie de ce Mémoire, le cas où le rayon vecteur du corps troublé reste toujours plus petit que celui du corps troublant, et j'en ai rendu plus claire l'application, en calculant les perturbations absolues que la comète de Encke éprouve de la part de Saturne. Je traiterai dans la deuxième partie le cas contraire, et enfin le cas mixte dans lequel les deux orbites se coupent mutuellement.

---

§ I[er]. — *Considérations générales sur le développement des perturbations dans le cas des grandes excentricités et des grandes inclinnisons.*

1. Les points essentiels, dans la théorie des perturbations en général, ou dans le problème de trois ou d'un plus grand nombre de corps, sont : le développement de la fonction perturbatrice, la combinaison de ce développement avec des coordonnées convenablement choisies, et enfin l'intégration des séries infinies qui en résultent. Je traiterai ici le premier et le troisième point tout autrement que je ne l'ai fait dans les théories que j'ai exposées jusqu'à ce moment, et qui supposent de petites excentricités et de petites inclinaisons; quant au second point, je le traiterai, au contraire, exactement de la même manière.

L'unité divisée par la distance réciproque du corps troublé et du corps troublant, est le terme le plus compliqué de la fonction perturbatrice; c'est celui dont je m'occuperai le premier. Quoique ma théorie puisse s'appliquer aux planètes et notamment aux quatre petites, pour plus de simplicité, je nommerai *comète* le corps troublé, et simplement *planète* le corps troublant. Soient Δ la distance de la comète à la planète au temps t, r le rayon vecteur de la comète, r' celui de la planète, et H le cosinus de l'angle que font entre eux les deux rayons vecteurs au même temps t. Alors,

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'H}}.$$

Si l'on ne peut pas avoir en même temps $r=r'$ et $H=1$, ou, en d'autres termes, si les deux orbites ne se coupent pas (*), cette fonction peut toujours être convertie en une série *convergente* et développée à l'infini, d'après les cosinus et les sinus des multiples de l'angle dont elle dépend; les expressions analytiques des coefficients d'une pareille série comprenant généralement tous les cas, ne sont pas actuellement connues, il est vrai; mais on peut, dans chaque cas, calculer la valeur numérique de ces coefficients par les quadratures, et s'assurer, par la même methode, de la convergence de la serie.

Les développements analytiques que l'on peut donner, conduisent à des sé-

(*) Dans ce cas particulier, qui suppose le choc des deux corps, la fonction perturbatrice acquiert une valeur infiniment grande, et le calcul des perturbations devient impossible. Mais cette impossibilité n'a lieu que quand les deux corps se rencontrent réellement; car si les orbites ont seulement une position telle que le choc soit possible, mais qu'il n'ait pas lieu, alors le calcul des perturbations n'est plus impraticable.

Nous avons un exemple intéressant de ce cas-là dans la comète de Biela, à l'égard de la Terre.

ries dont chacune en particulier ne converge pas toujours, même lorsque la convergence est possible en général ; il faut y distinguer le cas où $r > r'$, de celui où $r < r'$.

Si l'on ordonne le développement en série d'après les puissances de r et r', on aura, comme on sait,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} + \frac{r}{r'^2} U_1 + \frac{r^2}{r'^3} U_2 + \frac{r^3}{r'^4} U_3 + \text{etc.} \tag{1}$$

et

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} U_1 + \frac{r'^2}{r^3} U_2 + \frac{r'^3}{r^4} U_3 + \text{etc.}, \tag{2}$$

les valeurs des coefficients désignés par U_1, U_2, U_3, etc., étant les suivantes,

$$U_1 = H,$$
$$U_2 = \frac{3}{2} H^2 - \frac{1}{2},$$
$$U_3 = \frac{5}{2} H^3 - \frac{3}{2} H,$$
$$U_4 = \frac{5.7}{2.4} H^4 - \frac{3.5}{2.4} 2H^2 + \frac{1.3}{2.4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aucun de ces coefficients ne peut devenir plus grand que $+1$ ou plus petit que -1.

Si $H = 1$, on a :

$$U_1 = 1, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 1, \quad U_4 = 1, \text{ etc.}$$

Si $H = -1$, on a :

$$U_1 = -1, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = -1, \quad U_4 = 1, \text{ etc.}$$

Pour toutes les autres valeurs de H comprises entre ces limites, les coefficients U_1, U_2, etc., sont toujours plus petits que 1.

2. Les traités que l'on possède sur la convergence ou la divergence des séries infinies montrent que la série (1) converge toujours lorsque $r < r'$, et la série (2) lorsque $r > r'$. Mais si $r = r'$, les deux séries (1) et (2) donnent l'une et l'autre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left(1 + U_1 + U_2 + U_3 + \text{etc.}\right). \tag{3}$$

Cette série est toujours convergente, excepté quand H atteint sa valeur limite $+1$. Mais on tombe alors sur le cas indiqué à l'art. **1**, où la fonction perturbatrice devient infiniment grande et ne peut se résoudre en une série

périodique convergente. Si $H = -1$ en même temps que $r = r'$, il semblerait que la convergence de la série (3) doit encore cesser d'avoir lieu, et cependant il n'en est rien. Il faut alors développer $\frac{1}{\Delta}$ d'abord jusqu'à un terme dont l'indice, qui dépend des différentes circonstances où l'on se trouve, soit n, et ensuite jusqu'au terme dont l'indice est $n + 1$, et prendre la moyenne de ces deux développements; ou, si l'on veut, il ne faut prendre que la moitié du dernier terme qui doit entrer dans le développement. On voit par là que, même dans le cas particulier qui nous occupe, le développement de $\frac{1}{\Delta}$ est encore convergent.

On voit, du reste, que les séries (1), (2) et (3) comprennent tous les cas dans lesquels, en général, la fonction perturbatrice peut être convertie en une série périodique convergente. Mais, comme les coefficients du développement qui résultent de la série (1) ont, par rapport à la comète, une forme différente de ceux qui résultent de la série (2), il faut distinguer deux cas, savoir :

Premier cas, $r < r'$.

Deuxième cas, $r > r'$.

On pourrait encore ajouter un troisième cas, savoir, $r \lessgtr r'$.

3. Les quotients différentiels de $\frac{1}{\Delta}$ convergent aussi toujours, à l'exception du seul cas dont nous avons déjà parlé; il y a cependant cette différence que, quand r et r' ne diffèrent pas beaucoup l'un de l'autre, la convergence ne commence pas dès le premier terme de la série, tandis que cela a toujours lieu pour le développement en série de $\frac{1}{\Delta}$.

Les intégrales

$$\int \frac{1}{\Delta}\, dt, \qquad \int \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dr}\, dt, \qquad \int \frac{d\frac{1}{\Delta}}{dH}\, dt,$$

convergent plus rapidement que la quantité $\frac{1}{\Delta}$ et ses quotients différentiels eux-mêmes; car on peut considérer une intégrale générale comme une intégrale définie prise entre toutes les limites possibles. Nous pouvons donc considérer les intégrales précédentes comme la somme de toutes les valeurs possibles de leurs différentielles; mais, comme la quantité $\frac{r^n}{r'^{n+1}} U_n$ et ses quotients dif-

férentiels sont toujours plus petits que $\frac{r^{n-1}}{r'^{n}} U_{n-1}$ et ses quotients différentiels, la somme de toutes les valeurs possibles de la première de ces quantités est encore bien plus petite que celle de toutes les valeurs possibles de la seconde.

Cette proposition souffre cependant quelquefois une exception ; car, lorsque les valeurs de certains termes des petites différentielles conservent longtemps le même signe, tandis que cela n'arriverait pas pour les grandes différentielles, ou que cela n'aurait pas lieu dans la même mesure, alors, dans les intégrales des petites différentielles, il peut résulter des termes qui soient plus grands que les termes les plus considérables qui proviennent des intégrales des grandes différentielles. Mais les termes de ce genre qui résultent de l'intégration sont toujours isolés, et la proposition reste vraie pour tout le reste.

On verra, dans la suite, que précisément dans le cas où la convergence dans les différentielles est la moindre, elle augmente, en général, le plus par l'intégration.

4. Désignons par Ω la fonction perturbatrice, par m la masse de la comète, par m' celle de la planète, et par M celle du soleil; alors

$$\Omega = \frac{m'}{M + m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^{2}}\,H\right).$$

Considérons le premier cas (art. 2), et substituons la série correspondante à $\frac{1}{\Delta}$, on aura :

$$\Omega = \frac{m'}{M + m}\left(\frac{1}{r'} + \frac{r^{2}}{r'^{3}}\,U_{2} + \frac{r^{3}}{r'^{4}}\,U + \frac{r^{4}}{r'^{5}}\,U_{4} + \text{etc.}\right).$$

Il est digne de remarque que le terme $\frac{r}{r'^{2}}$ H de la fonction perturbatrice qui provient de l'attraction exercée par le soleil sur la planète, simplifie le développement dans le cas actuel, tandis que ce même terme rend plus compliquée la forme analytique de l'équation différentielle du problème des trois corps. Les équations différentielles du second ordre qui expriment le mouvement de chaque corps d'un système autour d'un point fixe quelconque, ou bien celles qui expriment le mouvement de ces mêmes corps autour de leur centre commun de gravité, peuvent être, comme on sait, ramenées à dépendre des quotients différentiels partiels d'une même grandeur; ils sont donc, considérés analytiquement, plus simples que les équations différentielles qui expriment le mouvement relatif de ces corps autour de l'un d'eux ; car dans celles-ci, pour chaque corps en particulier, il faudrait introduire une fonction perturbatrice plus compliquée (celle que nous désignons par Ω pour les comètes).

Néanmoins, le développement de ces dernières équations est plus simple que celui des premières, car ici disparaît le premier terme qui est le plus considérable, tandis que cela n'arrive pas dans l'autre cas. On verra bientôt que ce même terme $\frac{r}{r'^2}$ H contribue aussi essentiellement à simplifier les perturbations dans le cas de $r > r'$. Nous avons ici un exemple de cette particularité, qui se représente souvent, que les formules fondamentales, les plus simples sous le rapport analytique, ne sont pas toujours les plus commodes et les plus faciles dans l'application.

Remarquons que, pour arriver à obtenir les perturbations de la comète, nous n'avons pas besoin de Ω même, mais seulement de ses quotients différentiels relativement aux coordonnées de la comète. On voit donc que nous pouvons négliger le premier terme de la série précédente; nous avons ainsi :

$$(1) \qquad \Omega = \frac{m'}{M+m}\left(\frac{r^2}{r'^3}U_2 + \frac{r^3}{r'^4}U_3 + \frac{r^4}{r'^5}U_4 + \text{etc.}\right).$$

Substituons le développement de $\frac{1}{\Delta}$, donné plus haut pour le second cas, dans l'expression

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}H\right),$$

on aura :

$$\Omega = \frac{m'}{M+m}\left(\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}U_1 + \frac{r'^2}{r^3}U_2 + \frac{r'^3}{r^4}U_3 + \text{etc.} - \frac{r}{r'^2}H\right).$$

Mais on verra plus bas que les termes

$$\frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}U_1 - \frac{r'^2}{r}H,$$

lorsqu'on les substitue ensemble dans l'expression de la différentielle des perturbations, sont intégrables sans le secours d'une série infinie; ils se détachent donc d'eux-mêmes des autres termes, à cause de cette propriété, et il reste

$$(2) \qquad \Omega = \frac{m'}{M+m}\left(\frac{r'^2}{r^3}U_2 + \frac{r'^3}{r^4}U_3 + \frac{r'^4}{r^5}U_4 + \text{etc.}\right),$$

expression analogue à celle trouvée plus haut pour le premier cas, en ce qu'elle commence, comme elle, par le terme multiplié par U_2.

5. Je nommerai *convergence naturelle* de la fonction perturbatrice le degré ou la grandeur de la convergence qui se manifeste de terme en terme pour

chaque cas particulier, dans les expressions (1) et (2) développées dans l'article précédent, car elle se manifeste dans le développement même de cette fonction d'après les multiples de l'angle compris entre les rayons r et r', c'est-à-dire de *l'angle le plus simple* dont on puisse faire dépendre la fonction perturbatrice, quel que soit le mode de développement que l'on adopte. Je pense donc qu'abstraction faite de la diminution qui résulte de l'intégration, cette convergence ne peut être augmentée, et que, par conséquent, dans le développement des perturbations, il faut s'en contenter comme elle se présente, suivant les circonstances. Mais dans les développements plus étendus elle pourrait bien, suivant les cas, se trouver considérablement diminuée; par conséquent, le point essentiel que l'on doit avoir en vue consiste à s'efforcer de diminuer le moins possible la convergence naturelle de la fonction perturbatrice.

6. Dans le développement de la fonction perturbatrice, en multiples des sinus et cosinus de l'anomalie moyenne des deux corps célestes que l'on considère, on est inévitablement conduit à développer les coefficients en séries infinies, ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité et de l'inclinaison; si l'on veut exprimer explicitement, par des transcendantes, ces séries ou leur somme, c'est-à-dire les coefficients eux-mêmes, la convergence naturelle de la fonction perturbatrice se trouve considérablement diminuée, même quand les excentricités et les inclinaisons sont petites; mais si elles sont un peu considérables, cette convergence diminue tellement, que l'on est obligé de renoncer à l'emploi des séries infinies auxquelles on est conduit. C'est ce qui a lieu au plus haut degré, lorsque l'on considère des excentricités et des inclinaisons comme celles des orbites des comètes. Pour arriver à la solution du problème qui nous occupe, il faut alors, dans la fonction perturbatrice et dans toutes les autres fonctions dont le développement est nécessaire, éviter les séries *infinies* ordonnées d'après les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison.

Éviter complétement l'emploi de pareilles séries INFINIES est la base de la méthode que je vais commencer à exposer.

§ II. — *Développement de la fonction perturbatrice dans le cas où $r < r'$.*

7. Désignons par I l'inclinaison mutuelle des orbites de la comète et de la planète; par $N + K$ l'angle compté sur l'orbite de la comète, et compris entre le nœud ascendant de l'orbite de la comète sur celle de la planète et le lieu du périhélie de la comète; par $N - K$ l'angle compté sur l'orbite de la planète et compris entre ce même nœud et le périhélie de la planète; par f l'anomalie vraie de la comète, et par f' celle de la planète.

Alors on a :

$$H = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f - f' + 2K) + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f + f' + 2N).$$

Les quantités I, K et N ne sont pas, en général, données immédiatement; on a ordinairement à la place :

ω, la distance du périhélie de l'orbite de la comète, au nœud ascendant de cette même orbite sur un plan fondamental (ordinairement l'écliptique);

θ, la longitude de ce nœud ascendant;

i, l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le même plan fondamental;

ω', θ', i', les mêmes quantités relatives à l'orbite de la planète à l'égard du même plan fondamental.

Pour calculer les quantités désignées plus haut, on se sert des suivantes(*) :

Φ, la distance du nœud dont la longitude a été désignée par θ, au nœud ascendant de l'orbite de la comète sur celle de la planète;

Ψ, la distance du nœud dont la longitude a été désignée par θ', au même nœud commun des deux orbites.

On a alors

$$\sin \tfrac{1}{2} I \sin \tfrac{1}{2}(\Psi + \Phi) = \sin \tfrac{1}{2}(\theta - \theta') \sin \tfrac{1}{2}(i + i'),$$
$$\sin \tfrac{1}{2} I \cos \tfrac{1}{2}(\Psi + \Phi) = \cos \tfrac{1}{2}(\theta - \theta') \sin \tfrac{1}{2}(i - i'),$$
$$\cos \tfrac{1}{2} I \sin \tfrac{1}{2}(\Psi - \Phi) = \sin \tfrac{1}{2}(\theta - \theta') \cos \tfrac{1}{2}(i + i'),$$
$$\cos \tfrac{1}{2} I \cos \tfrac{1}{2}(\Psi - \Phi) = \cos \tfrac{1}{2}(\theta - \theta') \cos \tfrac{1}{2}(i - i').$$

Si l'on substitue dans ces équations les valeurs de i, i', θ et θ' relatives à une certaine époque, on obtiendra les valeurs de I, Φ et Ψ, relatives à la même époque. Désignons respectivement par ν et k les valeurs de N et K relatives à cette même époque, nous aurons

$$2\nu = \omega + \omega' - (\Psi + \Phi),$$
$$2k = \omega - \omega' + (\Psi - \Phi).$$

Avec ces valeurs désignées par ν et k, au lieu de N et K, on pourra exécuter les calculs numériques.

8. Reprenons l'expression donnée pour H dans l'article précédent, et mettons-la sous la forme suivante :

$$H = A \cos f + B \sin f;$$

(*) Voyez *Fundamenta nova investigationis orbitæ lunæ*, etc., page 82, art 22; et page 91, art. 25.

alors,

$$A = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f' - 2K) + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos(f' + 2N),$$
$$B = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \sin(f' - 2K) - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(f' + 2N).$$

Nous pouvons mettre ces quantités A et B sous la forme

$$A = l \cos(f' - L),$$
$$B = l' \sin(f' - L'),$$

en faisant

$$l \sin L = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2K - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2N,$$
$$l \cos L = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2K + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2N,$$
$$l' \sin L' = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2K + \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2N,$$
$$l' \cos L' = \cos^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2K - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2N.$$

Les quantités A et B sont toujours plus petites que 1, ou du moins elles ne sont jamais plus grandes, et l ainsi que l' jouissent de la même propriété.

Tirons leurs valeurs des expressions précédentes, nous aurons :

$$l^2 = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 I [1 - \cos 2(K + N)],$$
$$l'^2 = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 I [1 + \cos 2(K + N)].$$

Si l'on y fait $I = 0$, ou bien $I = 180$ degrés, alors on a $l = 1$ et $l' = 1$; pour toute autre valeur de I, l ainsi que l' sont toujours moindres que 1, ou du moins ne sont jamais plus grandes. Si $N + K = 0$, ou bien $= 180$ degrés, alors $l = 1$ et $l' < 1$; si au contraire $N + K = 90$ degrés, ou bien $= 270$ degrés, alors $l < 1$ et $l' = 1$, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison. Mais si en même temps l'inclinaison $I = 90$ degrés, alors on a respectivement $l' = 0$, ou bien $l = 0$. Dans tous les autres cas, l et l' sont toutes deux plus petites que 1. Il résulte des équations qui précèdent, l'équation de condition suivante :

$$\sqrt{l^2 + l'^2 - 1} = \cos I,$$

qui peut être employée pour vérifier le calcul numérique. Les valeurs de l et de l' étant donc toujours plus petites, ou du moins n'étant jamais plus grandes que dans le cas où l'orbite de la comète et celle de la planète sont situées dans un seul et même plan, il s'ensuit que, dans la forme que nous avons donnée plus haut pour la quantité H, l'existence d'une inclinaison entre les orbites de la comète et de la planète ne peut point nuire à la convergence naturelle de la fonction perturbatrice.

9. On verra plus loin que, dans les expressions auxquelles on est conduit pour les perturbations, les quotients différentiels de Ω sont partout mul-

tipliés par le facteur $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}$, dans lequel a exprime le demi-grand axe, et e l'excentricité de l'orbite de la comète. Multiplions donc l'expression (1) donnée pour Ω, dans l'art. 4, par ce facteur; substituons les valeurs de U_2, U_3, etc., contenues dans l'art. 1, ainsi que l'expression donnée pour H dans l'article qui précède, et posons en outre

$$x = \frac{r}{a}\cos f,$$

$$y = \frac{r}{a}\sin f;$$

nous obtiendrons

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = x^2C_{2,0} + xyC_{1,1} + y^2C_{0,2}$$
$$+ x^3C_{3,0} + x^2yC_{2,1} + xy^2C_{1,2} + y^3C_{0,3}$$
$$+ \text{ etc.},$$

en faisant, pour abréger,

$$C_{2,0} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\left(\frac{3}{2}A^2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$C_{1,1} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\,3AB,$$

$$C_{0,2} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^3}{r'^3}\left(\frac{3}{2}B^2 - \frac{1}{2}\right),$$

$$C_{3,0} = \frac{m'}{M+m}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{a^4}{r'^4}\left(\frac{5}{2}A^3 - \frac{3}{2}A\right),$$

etc. etc.

Il suit de là que nous pouvons prendre généralement

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma x^k y^l C_{k,l},$$

en négligeant les termes dans lesquels $k + l < 2$. Pour trouver l'expression générale de $C_{k,l}$, développons la quantité

$$X = (1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

en une série infinie de la forme

$$X = \Sigma \xi^k \eta^l D_{k,l};$$

nous obtiendrons d'abord

$$X = 1 + \frac{1}{2}(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2) + \frac{1.3}{2.4}(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2)^2$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2)^3 + \text{etc.}$$

On trouve ainsi facilement que parmi tous les termes dans lesquels l'exposant de $(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2)$ est plus grand que $k + l$, aucun ne peut contenir de termes multipliés par $\xi^k\eta^l$. Faisons donc $k + l = n$, et tous les termes en question seront contenus dans l'expression suivante :

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots\ 2n}(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2)^n$$
$$+\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{2.4.6\ldots 2n-2}(2A\xi + 2B\eta - \xi^2 - \eta^2)^{n-1} + \text{etc.}$$

Partageons le quadrinôme en deux binômes, alors nous arriverons à l'expression suivante, qui contient tous les termes multipliés par $\xi^k\eta^l$:

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots\ n}(A\xi + B\eta)^n$$
$$-\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2.3\ \ldots\ n-1}\cdot\frac{n-1}{1}\frac{(A\xi + B\eta)^{n-2}}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$
$$+\frac{1.3.5\ldots 2n-5}{1.2.3\ldots\ n-2}\cdot\frac{n-2.n-3}{1.2}\frac{(A\xi + B\eta)^{n-4}}{4}(\xi^2 + \eta^2)^2 - \text{etc.}$$

Le premier terme de cette expression donne dans $D_{k,l}$ le terme

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l}A^k B^l.$$

Le deuxième terme donne les deux termes suivants,

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-2}A^k B^{l-2} - \tfrac{1}{2}\frac{1.3.5\ldots 2n-3}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l}A^{k-2}B^l,$$

et ainsi de suite ; de cette manière on obtient facilement :

$$D_{k,l} = \frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-1}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l}A^k B^l$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-3}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots l-2}\cdot\frac{A^k B^{l-2}}{1} + \frac{1.3.5\ldots 2(k+l)-3}{1.2.3\ldots k-2.1.2\ldots l}\cdot\frac{A^{k-2}B^l}{1}\right\}$$
$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-4}\cdot\dfrac{A^k B^{l-4}}{1.2} + 2\dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l-2}\cdot\dfrac{A^{k-2}B^{l-2}}{1.2}\\ \qquad + \dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-5}{1.2\ldots k-4.1.2\ldots l}\cdot\dfrac{A^{k-4}B^l}{1.2}\end{array}\right\}$$
$$-\tfrac{1}{8}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k.1.2\ldots l-6}\cdot\dfrac{A^k B^{l-6}}{1.2.3} + 3\dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-2.1.2\ldots l-4}\cdot\dfrac{A^{k-2}B^{l-4}}{1.2.3}\\ + 3\dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-4.1.2\ldots l-2}\cdot\dfrac{A^{k-4}B^{l-2}}{1.2.3} + \dfrac{1.3\ldots 2(k+l)-7}{1.2\ldots k-6.1.2\ldots l}\cdot\dfrac{A^{k-6}B^l}{1.2.3}\end{array}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

La loi de la série est évidente. Désignons maintenant par a' le demi-grand axe de l'orbite de la planète ; alors

$$C_{k,l} = \frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1} \left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1} D_{k,l}.$$

De l'expression précédente on tire les valeurs particulières pour $D_{k,l}$, dont j'ai fait usage pour le calcul des perturbations de la comète de *Encke*, produites par Saturne, ainsi qu'il suit :

$$D_{2,0} = \frac{3}{2} A^2 - \frac{1}{2},$$
$$D_{1,1} = 3\, AB,$$
$$D_{0,2} = \frac{3}{2} B^2 - \frac{1}{2},$$
$$D_{3,0} = \frac{5}{2} A^3 - \frac{3}{2} A,$$
$$D_{2,1} = \frac{15}{2} A^2B - \frac{3}{2} B,$$
$$D_{1,2} = \frac{15}{2} AB^2 - \frac{3}{2} A,$$
$$D_{0,3} = \frac{5}{2} B^3 - \frac{3}{2} B,$$
$$D_{4,0} = \frac{35}{8} A^4 - \frac{15}{4} A^2 + \frac{3}{8},$$
$$D_{3,1} = \frac{35}{2} A^3B - \frac{15}{2} AB;$$
$$D_{2,2} = \frac{105}{4} A^2B^2 - \frac{15}{4} A^2 - \frac{15}{4} B^2 + \frac{3}{4},$$
$$D_{1,3} = \frac{35}{2} AB^3 - \frac{15}{2} AB,$$
$$D_{0,4} = \frac{35}{8} B^4 - \frac{15}{4} B^2 + \frac{3}{8},$$
$$D_{5,0} = \frac{63}{8} A^5 - \frac{35}{4} A^3 + \frac{15}{8} A,$$
$$D_{4,1} = \frac{315}{8} A^4B - \frac{105}{4} A^2B + \frac{15}{8} B,$$
$$D_{3,2} = \frac{315}{4} A^3B^2 - \frac{35}{4} A^3 - \frac{105}{4} AB^2 + \frac{15}{4} A,$$
$$D_{2,3} = \frac{315}{4} A^2B^3 - \frac{105}{4} A^2B - \frac{35}{4} B^3 + \frac{15}{4} B,$$

$$D_{1,4} = \frac{315}{8}AB^4 - \frac{105}{4}AB^2 + \frac{15}{8}A,$$
$$D_{0,5} = \frac{63}{8}B^5 - \frac{35}{4}B^3 + \frac{15}{8}B,$$
$$D_{6,0} = \frac{231}{16}A^6 - \frac{315}{16}A^4 + \frac{105}{16}A^2 - \frac{5}{16},$$
$$D_{5,1} = \frac{693}{8}A^5B - \frac{315}{4}A^3B + \frac{105}{8}AB,$$
$$D_{4,2} = \frac{3465}{16}A^4B^2 - \frac{315}{16}A^4 - \frac{945}{8}A^2B^2 + \frac{105}{8}A^2 + \frac{105}{16}B^2 - \frac{15}{16},$$
$$D_{3,3} = \frac{1155}{4}A^3B^3 - \frac{315}{4}A^3B - \frac{315}{4}AB^3 + \frac{105}{4}AB,$$
$$D_{2,4} = \frac{3465}{16}A^2B^4 - \frac{945}{8}A^2B^2 - \frac{315}{16}B^4 + \frac{105}{16}A^2 + \frac{105}{8}B^2 - \frac{15}{16},$$
$$D_{1,5} = \frac{693}{8}AB^5 - \frac{315}{4}AB^3 + \frac{105}{8}AB,$$
$$D_{0,6} = \frac{231}{16}B^6 - \frac{315}{16}B^4 + \frac{105}{16}B^2 - \frac{5}{16}.$$

10. Désignons par u l'anomalie excentrique de la comète, alors

$$x = \cos u - e,$$
$$y = \sqrt{1-e^2}\,.\,\sin u;$$

ce qui donne

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma\,(1-e^2)^{\frac{l}{2}}\sin^l u\,(\cos u - e)^k\,C_{k,l};$$

k et l étant des nombres toujours entiers et positifs, chacun de ces termes de Ω se compose d'un nombre *fini* de termes que l'on peut ordonner d'après les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie excentrique de la comète. Les coefficients de ces sinus et cosinus sont des fonctions *finies* de l'excentricité de la comète, ou, en d'autres termes, des fonctions entières et rationnelles des quantités e et $\sqrt{1-e^2}$. Par ce développement on évite donc complétement dans la fonction perturbatrice, les séries *infinies* ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité de la comète, et par conséquent on ne nuit point à la convergence naturelle de cette fonction. Les termes de $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega$ sont donc, lorsque l est un nombre pair, de la forme suivante :

$$\left\{\alpha + \alpha_1\cos u + \alpha_2\cos 2u + \ldots + \alpha_{k+l-1}\cos(k+l-1)u + \alpha_{k+l}\cos(k+l)u\right\}C_{k,l},$$

et lorsque l est un nombre impair,

$$\left\{\beta_1 \sin u + \beta_3 \sin 3u + \ldots + \beta_{k+l-1} \sin(k+l-1)u + \beta_{k+l} \sin(k+l)u\right\} C_{k,l}.$$

Les quantités $D_{k,l}$ peuvent se développer en fonctions finies des multiples des sinus et cosinus de l'anomalie vraie de la planète. Leur forme, lorsque $k+l$ est un nombre pair, sera la suivante :

$$\begin{aligned} D_{k,l} = {} & \gamma_{k+l}\cos(k+l)f' + \gamma_{k+l-2}\cos(k+l-2)f' + \ldots + \gamma_2 \cos 2f' + \gamma_0 \\ & + \varepsilon_{k+l}\sin(k+l)f' + \varepsilon_{k+l-2}\sin(k+l-2)f' + \ldots + \varepsilon_2 \sin 2f'; \end{aligned}$$

et lorsque $k+l$ est un nombre impair,

$$\begin{aligned} D_{k,l} = {} & \gamma_{k+l}\cos(k+l)f' + \gamma_{k+l-2}\cos(k+l-2)f' + \ldots + \gamma_1 \cos f' \\ & + \varepsilon_{k+l}\sin(k+l)f' + \varepsilon_{k+l-2}\sin(k+l-2)f' + \ldots + \varepsilon_1 \sin f', \end{aligned}$$

tous les coefficients γ et ε étant des fonctions rationnelles et entières de $\sin^2 \frac{1}{2} I$.

Il suit de là que les quantités $C_{k,l}$ peuvent également être développées en fonctions *finies* de l'anomalie vraie de la planète, et que les coefficients de tous les termes de ces fonctions seront des fonctions *finies* de l'excentricité de cette même planète. Car

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1} = \frac{(1+e'\cos f')^{k+l+1}}{(1-e'^2)^{k+l+1}};$$

et comme $k+l+1$ est toujours un nombre entier et positif, cette expression peut se convertir en la série *finie* suivante :

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{k+l+1} = \lambda_0 + \lambda_1 \cos f' + \ldots + \lambda_{k+l}\cos(k+l)f' + \lambda_{k+l+1}\cos(k+l+1)f',$$

dans laquelle les coefficients λ sont des fonctions entières et rationnelles de e' et de $\frac{1}{1-e'^2}$. Il s'ensuit que les quantités $C_{k,l}$, après leur développement, auront la forme suivante :

$$\begin{aligned} C_{k,l} = {} & \mu_0 + \mu_1 \cos f' + \ldots + \mu_{2(k+l)}\cos 2(k+l)f' + \mu_{2(k+l)+1}\cos[2(k+l)+1]f' \\ & + \rho_1 \sin f' + \ldots + \rho_{2(k+l)} \sin 2(k+l)f' + \rho_{2(k+l)+1}\sin[2(k+l)+1]f', \end{aligned}$$

où tous les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles de e', $\frac{1}{1-e'^2}$ et $\sin^2 \frac{1}{2} I$.

Si l'on compare cette expression avec la forme donnée plus haut pour les coefficients de $C_{k,l}$ dans $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega$, on voit que cette quantité aura enfin la

forme suivante :

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma K_{i,i'} \cos(iu + i'f') + \Sigma L_{i,i'} \sin(iu + i'f'),$$

et qu'aucun des coefficients $K_{i,i'}$ et $L_{i,i'}$ ne contiendra des séries infinies ordonnées d'après les puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons mutuelles des orbites, mais qu'ils se composent simplement de fonctions entières et rationnelles des quantités

$$e', \quad \frac{1}{1-e'^2}, \quad e, \quad \sqrt{1-e^2} \quad \text{et} \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} I\,;$$

ce qui, par conséquent, ne peut nuire, ou du moins très-peu, à la convergence naturelle de la fonction perturbatrice.

D'après cette analyse, on voit clairement quelle méthode il faudrait suivre pour le développement de la fonction perturbatrice, dans le second cas, lorsque $r > r'$.

11. A cause de la petite excentricité des planètes, il n'est pas nécessaire, du moins dans la plupart des cas, d'éviter l'emploi des séries infinies ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité des *planètes*. On perd ainsi, il est vrai, quelque chose de la convergence naturelle de la fonction perturbatrice, mais la diminution de convergence qui provient de là, n'est pas assez considérable pour devenir nuisible; si l'on perd quelque chose sous ce rapport, on y gagne, au contraire, sous le rapport de la facilité de l'intégration, et de l'emploi ultérieur des perturbations. Je donnerai en conséquence la forme suivante à la fonction perturbatrice :

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,\Omega = \Sigma M_{i,i'} \cos(iu + i'g') + \Sigma N_{i,i'} \sin(iu + i'g'),$$

g' étant l'anomalie moyenne de la planète.

Maintenant, pour le but que nous avons en vue, il est indifférent d'employer telle ou telle méthode pour développer Ω ou ses quotients différentiels, pourvu que dans le développement on revienne à la forme que nous venons d'indiquer, et que l'on obtienne complétement la valeur des coefficients; car à cette forme répondent des valeurs déterminées des coefficients $M_{i,i'}$ et $N_{i,i'}$, et toute méthode de développement, pourvu qu'elle soit basée sur des principes rigoureux, et qu'elle soit complète, conduira aux mêmes valeurs de ces coefficients. Il peut cependant être bien préférable, dans certains cas particuliers, d'employer telle méthode plutôt que telle autre. Dans le calcul des perturbations de la comète de *Encke* causées par Saturne, j'ai employé,

pour le développement des quotients différentiels de Ω, la même décomposition et les mêmes quantités qui m'ont servi tout à l'heure à trouver la forme que l'on doit donner au développement, dans le problème qui nous occupe, pour obtenir la plus grande convergence possible. Dans cet exemple, cette méthode m'a très-rapidement conduit au but, car le développement des quotients différentiels de Ω ne m'a coûté qu'un travail de trois jours.

De même pour le calcul des perturbations de la même comète produites par Jupiter, aussi bien que pour celles des quatre nouvelles planètes provenant de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, et dans beaucoup d'autres cas, cette même méthode est des plus commodes; c'est pourquoi je vais la décrire en détail.

12. Il faut d'abord exprimer les quantités $D_{k,l}$ de l'art. **9** par des multiples des sinus et cosinus de l'anomalie vraie. Pour cela, on pourrait développer les expressions analytiques; cependant je ne l'ai pas fait, parce que les coefficients de ces expressions deviendraient très-compliqués, lorsque les indices k et l auraient des valeurs un peu considérables. Un second motif pour lequel je n'ai point suivi cette méthode, c'est qu'en employant ces expressions analytiques, on n'a aucun contrôle pour les calculs numériques. J'ai exécuté le développement au moyen des valeurs particulières de A et de B; cette méthode qui se fonde, comme on voit, sur les quadratures mécaniques, est rigoureuse dans ce cas-ci, car le développement de A et de B conduit à une expression finie. Maintenant, si l'on calcule quelques valeurs particulières au delà de celles qui sont nécessaires pour le développement, il se présente alors de soi-même des conditions au moyen desquelles on peut s'assurer de l'exactitude du calcul numérique. Pour ce calcul, j'ai partagé la circonférence en 16 parties égales, et ensuite, au moyen des expressions de A et de B,

$$A = l \cos (f' - L),$$
$$B = l' \sin (f' - L'),$$

et de leurs puissances entières et positives, j'ai calculé les huit valeurs correspondantes aux valeurs de $f' = 0, = 22°30', = 45°, = 67°30'$, etc., jusqu'à $157° 30'$. J'ai ainsi obtenu les valeurs de chacun des coefficients de $D_{k,l}$; cependant, pour les quantités dans lesquelles $k + l = 2$ ou $= 3$, je ne prenais que la moitié de ces huit valeurs. Je désignerai par la série des notations

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_7,$$

les valeurs particulières de $D_{k,l}$, ainsi calculées. Désignons encore par c_i le coefficient de $\cos if'$, et par s_i celui de $\sin if'$, dans le développement de l'une quelconque des quantités $D_{k,l}$.

On aura alors, lorsque $k+l$ est un nombre pair :

$$8c_0 = \frac{(0)}{(2)} + \frac{(1)}{(2)},$$

$$8c_8 = \frac{(0)}{(2)} - \frac{(1)}{(2)},$$

$$2\{c_2 + c_6\} = \left[\frac{0}{4}\right],$$

$$2\{c_2 - c_6\} = \left\{\left[\frac{1}{4}\right] - \left[\frac{3}{4}\right]\right\} \cos\ 45^\circ,$$

$$2\{s_2 + s_6\} = \left\{\left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right]\right\} \cos\ 45^\circ,$$

$$2\{s_2 - s_6\} = \left[\frac{2}{4}\right],$$

$$4c_4 = \frac{(0)}{(4)} - \frac{(2)}{(4)},$$

$$4s_4 = \frac{(1)}{(4)} - \frac{(3)}{(4)},$$

où l'on fait, pour abréger,

$$\frac{(0)}{(4)} = Y_0 + Y_4, \qquad \left[\frac{0}{4}\right] = Y_0 - Y_4,$$

$$\frac{(1)}{(4)} = Y_1 + Y_5, \qquad \left[\frac{1}{4}\right] = Y_1 - Y_5,$$

$$\frac{(2)}{(4)} = Y_2 + Y_6, \qquad \left[\frac{2}{4}\right] = Y_2 - Y_6,$$

$$\frac{(3)}{(4)} = Y_3 + Y_7, \qquad \left[\frac{3}{4}\right] = Y_3 - Y_7,$$

$$\frac{(0)}{(2)} = \frac{(0)}{(4)} + \frac{(2)}{(4)},$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{(1)}{(4)} + \frac{(3)}{(4)}.$$

Lorsque $k+l$ est un nombre impair, on a

$$2\{c_1 + c_7\} = Y_0 + \{Y_2 - Y_6\} \cos 45^\circ,$$

$$2\{c_1 - c_7\} = \{Y_1 - Y_7\} \cos 22^\circ 30' + \{Y_3 - Y_5\} \sin 22^\circ 30',$$

$$2\{s_1 + s_7\} = \{Y_1 + Y_7\} \sin 22^\circ 30' + \{Y_3 + Y_5\} \cos 22^\circ 30',$$

$$2\{s_1 - s_7\} = \{Y_2 + Y_6\} \cos 45^\circ + Y_4,$$

$$2\{c_3 + c_5\} = Y_0 - \{Y_2 - Y_6\} \cos 45^\circ,$$

$$2\{c_3 - c_5\} = \{Y_1 - Y_7\} \sin 22^\circ 30' - \{Y_3 - Y_5\} \cos 22^\circ 30',$$

$$2\{s_3 + s_5\} = \{Y_1 - Y_7\} \cos 22^\circ 30' - \{Y_3 + Y_5\} \sin 22^\circ 30',$$

$$2\{s_3 - s_5\} = \{Y_2 + Y_6\} \cos 45^\circ - Y_4.$$

Ensuite, je développe les quantités $\frac{\sin if'}{r'^n}$ et $\frac{\cos if'}{r'^n}$ en séries infinies, ordonnées d'après les multiples des sinus et cosinus de l'anomalie moyenne de la planète; en les multipliant par les coefficients de $D_{k,l}$, précédemment trouvés, et par la quantité $\frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1}$, on obtient le développement de $C_{k,l}$. On a, par exemple,

$$D_{2,1} = c_1 \cos f' + s_1 \sin f' + c_3 \cos 3f' + s_3 \sin 3f',$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \cos f' = \alpha + \alpha_1 \cos g' + \alpha_2 \cos 2g' + \alpha_3 \cos 3g' + \alpha_4 \cos 4g' + \text{etc.},$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \sin f' = \qquad \beta_1 \sin g' + \beta_2 \sin 2g' + \beta_3 \sin 3g' + \beta_4 \sin 4g' + \text{etc.},$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \cos 3f' = \gamma + \gamma_1 \cos g' + \gamma_2 \cos 2g' + \gamma_3 \cos 3g' + \gamma_4 \cos 4g' + \text{etc.},$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} \sin 3f' = \qquad \delta_1 \sin g' + \delta_2 \sin 2g' + \delta_3 \sin 3g' + \delta_4 \sin 4g' + \text{etc.},$$

où je suppose tous les coefficients déjà exprimés en nombres; en faisant, pour abréger,

$$(1) \qquad \frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{a'}\right)^{k+l+1} = \mu_{k+l+1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} C_{2,1} = {} & \mu_4 (\alpha c_1 + \gamma c_3) + \mu_4 (\alpha_1 c_1 + \gamma_1 c_3) \cos g' + \mu_4 (\alpha_2 c_1 + \gamma_2 c_3) \cos 2g' \\ & + \mu_4 (\alpha_3 c_1 + \gamma_3 c_3) \cos 3g' + \mu_4 (\alpha_4 c_1 + \gamma_4 c_3) \cos 4g' + \text{etc.} \\ & + \mu_4 (\beta_1 s_1 + \delta_1 s_3) \sin g' + \mu_4 (\beta_2 s_1 + \delta_2 s_3) \sin 2g' + \mu_4 (\beta_3 s_1 + \delta_3 s_3) \sin 3g' \\ & + \mu_4 (\beta_4 s_1 + \delta_4 s_3) \sin 4g' + \text{etc.}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite pour les autres valeurs de $C_{k,l}$.

13. Pour exécuter les calculs indiqués dans l'article précédent, il est nécessaire de développer d'abord les quantités $\frac{a'^n}{r'^n} \cos mf'$ et $\frac{a'^n}{r'^n} \sin mf'$ en séries infinies ordonnées d'après les cosinus et sinus des multiples de l'anomalie moyenne de la planète. Ces développements peuvent se faire de plusieurs manières. On peut représenter les coefficients du développement de ces quantités, *m* et *n* étant des nombres quelconques entiers et positifs, par des fonctions finies et linéaires de deux transcendantes et de leurs quotients différentiels, par rapport à l'excentricité, et donner ainsi au développement de $\frac{a'^n}{r'^n} \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} mf'$ tout le degré d'exactitude que l'on voudra, pourvu que les deux transcendantes aient été préalablement développées d'une manière suffisamment exacte. C'est

d'après cette méthode que, dans la quatrième section de mes « *Fundamenta nova, etc.*, » j'ai développé la quantité $\frac{a'^n}{r'^n}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} mf'$ dont on a besoin dans la théorie de la lune, en choisissant alors, pour les deux transcendantes, le développement de r^2 et celui de $\frac{1}{r^2}$. Cette méthode est très-commodément applicable dans les cas où n et m sont de petits nombres, comme cela a lieu dans la théorie de la lune, mais elle cesse de l'être dans la pratique lorsque m est un nombre considérable, et que l'excentricité est petite, parce qu'alors les coefficients du développement qu'il s'agit de calculer proviennent de petites différences entre de grands nombres. Cette circonstance tient à ce que tous les termes des expressions auxquelles on arrive, pour sin mf' et cos mf', sont divisés par e^m, tandis qu'après la substitution des transcendantes on ne trouve plus de puissances négatives de l'excentricité. Tous les termes de cette nature se détruisent donc alors mutuellement par l'addition des termes des expressions finies de sin mf' et cos mf'. Si l'on voulait, par exemple, développer de cette manière la quantité $\frac{a^{16}}{r^{16}}\cos 14f$, ou bien $\frac{a^{16}}{r^{16}}\sin 14f$, seulement jusqu'aux quantités de l'ordre e^4, il faudrait alors avoir exactement les deux transcendantes en question jusqu'aux quantités de l'ordre e^{18}.

On peut, du reste, développer les quantités dont il s'agit au moyen du théorème de *Taylor*, et cela de plusieurs manières, selon que l'on applique ce théorème d'une manière ou de l'autre. Tous ces développements diffèrent de celui dont nous venons de parler, en particulier, parce qu'on n'y trouve point de division par l'excentricité, et que, par conséquent, il n'y a pas de petites différences entre des termes considérables. Voici le mode de développement que j'ai employé et qui est fondé sur ce même théorème. Je pose :

$$\frac{a}{r} = 1 + \delta\left(\frac{a}{r}\right)$$

et je désigne par $A_{n,i}$ le $i^{ème}$ coefficient de la $n^{ième}$ puissance du binôme (*).

Ainsi

$$A_{n,i} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

J'ai donc

$$\frac{a^n}{r^n} = 1 + A_{n,1}\delta\left(\frac{a}{r}\right) + A_{n,2}\delta\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_{n,3}\delta\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

Soit encore : $$f = g + \delta f;$$

(*) Je ferai remarquer que, pour plus de simplicité, dans cet article et dans le suivant, j'écrirai : a, r, f, g, e, au lieu de a', r', f', g', e'.

alors il vient

$$\cos mf = \cos mg - \delta f\, m \sin mg - \tfrac{1}{2}\delta f^2 m^2 \cos mg + \tfrac{1}{6}\delta f^3 m^3 \sin mg + \text{etc.},$$
$$\sin mf = \sin mg + \delta f\, m \cos mg - \tfrac{1}{2}\delta f^2 m^2 \sin mg - \tfrac{1}{6}\delta f^3 m^3 \cos mg + \text{etc.}$$

Si l'on fait ensuite:

lorsque i est un nombre pair,

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\,\delta f^i\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^h = (i,\,h)_0 + 2\Sigma(i,\,h)_\nu \cos \nu g\,;$$

et lorsque i est impair,

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\,\delta f^i\,\delta\left(\frac{a}{r}\right)^h = 2\Sigma\,(i,\,h)_\nu \sin \nu g\,;$$

et si l'on multiplie ces expressions l'une par l'autre, il vient:

$$\frac{a^n}{r^n}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} mf = \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} mg\,\left\{1 + (0)_{n,0} - m^2(2)_{n,0} + m^4(4)_{n,0} - m^6(6)_{n,0} \pm \text{etc.}\right\}$$
$$+ \Sigma\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(m \pm \nu)\,g\left\{\begin{matrix}(0)_{n,\nu} - m^2(2)_{n,\nu} + m^4(4)_{n,\nu} - m^6(6)_{n,\nu} \pm \text{etc.}\\ \pm\left\{m\,(1)_{n,\nu} - m^3\,(3)_{n,\nu} + m^5\,(5)_{n,\nu} \mp \text{etc.}\right\}\end{matrix}\right\},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de ν, excepté la valeur zéro, et faisant, pour abréger :

$$(0)_{n,0} = A_{n,2}(0,2)_0 + A_{n,3}(0,3)_0 + A_{n,4}(0,4)_0 + A_{n,5}(0,5)_0 + \text{etc.},$$
$$(2)_{n,0} = (2,0)_0 + A_{n,1}(2,1)_0 + A_{n,2}(2,2)_0 + A_{n,3}(2,3)_0 + \text{etc.},$$
$$(4)_{n,0} = (4,0)_0 + A_{n,1}(4,1)_0 + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}\,;$$

$$(0)_{n,\nu} = A_{n,1}(0,1)_\nu + A_{n,2}(0,2)_\nu + A_{n,3}(0,3)_\nu + A_{n,4}(0,4)_\nu + A_{n,5}(0,5)_\nu + \text{etc.},$$
$$(2)_{n,\nu} = (2,0)_\nu + A_{n,1}(2,1)_\nu + A_{n,2}(2,2)_\nu + A_{n,3}(2,3)_\nu + \text{etc.},$$
$$(4)_{n,\nu} = (4,0)_\nu + A_{n,1}(4,1)_\nu + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}\,;$$

$$(1)_{n,\nu} = (1,0)_\nu + A_{n,1}(1,1)_\nu + A_{n,2}(1,2)_\nu + A_{n,3}(1,3)_\nu + A_{n,4}(1,4)_\nu + \text{etc.},$$
$$(3)_{n,\nu} = (3,0)_\nu + A_{n,1}(3,1)_\nu + A_{n,2}(3,2)_\nu + \text{etc.},$$
$$(5)_{n,\nu} = (5,0)_\nu + \text{etc.},$$
$$\text{etc.}$$

Cette expression procure dans l'application cet avantage, que l'on obtient en même temps les coefficients du développement de $\frac{a^n}{r^n}\sin mf$ et de $\frac{a^n}{r^n}\cos mf$, car elle fait voir qu'ils sont les mêmes lorsque l'on dispose les arguments

comme on l'a fait ici. En effet, en suivant l'argument $m - \nu$ pour les différentes valeurs entières et positives que ν peut prendre successivement, on arrive à des multiples négatifs de g, de sorte qu'en les réunissant avec les termes semblables, mais positifs, il en résulte une différence entre les coefficients du développement des deux quantités $\frac{a^n}{r^n} \cos mf$ et $\frac{a^n}{r^n}$ sin mf, parce que dans le développement de la première, comme $\cos(-w) = \cos w$, les coefficients correspondants s'ajoutent, tandis que dans le développement de la seconde, comme $\sin(-w) = -\sin w$, ils se retranchent. Un autre avantage que procure cette expression dans la pratique, consiste en ce que les coefficients des termes de $\left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} mg$, également distants des deux extrémités, se composent des mêmes parties et ne diffèrent entre eux que par le signe algébrique. Il est, en outre, à remarquer que les coefficients de (i, h), sont des nombres entiers, et que les quantités $A_{n,i}$ sont égales à zéro depuis $i = n + 1$.

14. Pour pouvoir appliquer l'expression développée dans l'article précédent, il est nécessaire d'exprimer les quantités (i, h), en fonction de l'excentricité de la planète. On peut, pour un petit nombre d'entre elles, donner la loi générale d'une manière assez simple, mais presque toujours on arrive à une grande complication. Je crois que le plus simple est de les développer d'après les puissances de l'excentricité, et de s'en tenir aux termes d'un certain ordre. Et comme je crois que la sixième puissance de l'excentricité des planètes est la plus élevée dont on puisse avoir besoin, pour l'application de cette expression au cas qui nous occupe, je n'ai pas poussé mes développements au delà ; s'il se rencontrait un cas dans lequel on eût besoin de termes d'un ordre plus élevé, on pourrait, sans grande peine, pousser les développements jusque-là. Les séries suivantes sont bien connues :

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{a}{r}\right) = & \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5\right)\cos g + \left(e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{24}e^6\right)\cos 2g \\ & + \left(\frac{9}{8}e^3 - \frac{81}{128}e^5\right)\cos 3g + \left(\frac{4}{3}e^4 - \frac{16}{15}e^6\right)\cos 4g \\ & + \frac{625}{384}e^5 \cos 5g + \frac{81}{40}e^6 \cos 6g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta f = & \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\sin g + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2g \\ & + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\sin 3g + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4g \\ & + \frac{1097}{960}e^5 \sin 5g + \frac{1223}{960}e^6 \sin 6g. \end{aligned}$$

En les multipliant, ainsi que leurs puissances et leurs produits, les uns par les autres, on obtient (*) :

$$(0,2)_0 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6,$$
$$(0,3)_0 = \frac{3}{4}e^4 + \frac{5}{4}e^6,$$
$$(0,4)_0 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{15}{8}e^6,$$
$$(0,5)_0 = \frac{5}{4}e^6,$$
$$(0,6)_0 = \frac{5}{16}e^6,$$

$$(2,0)_0 = e^2 + \frac{9}{64}e^4 + \frac{43}{576}e^6,$$
$$(2,1)_0 = \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{12}e^6,$$
$$(2,2)_0 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{107}{384}e^6,$$
$$(2,3)_0 = \frac{5}{16}e^6,$$
$$(2,4)_0 = \frac{1}{8}e^6,$$

$$(4,0)_0 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{49}{576}e^6,$$
$$(4,1)_0 = \frac{1}{24}e^6,$$
$$(4,2)_0 = \frac{1}{24}e^6,$$

$$(6,0)_0 = \frac{1}{36}e^6,$$

$$(0,1)_1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{1}{384}e^5,$$
$$(0,2)_1 = \frac{1}{2}e^3 + \frac{1}{3}e^5,$$
$$(0,3)_1 = \frac{3}{8}e^3 + \frac{33}{32}e^5,$$
$$(0,4)_1 = e^5,$$
$$(0,5)_1 = \frac{5}{16}e^5,$$

$$(2,0)_1 = \frac{5}{8}e^3 + \frac{1}{32}e^5,$$
$$(2,1)_1 = \frac{1}{4}e^3 + \frac{35}{384}e^5,$$
$$(2,2)_1 = \frac{5}{16}e^5,$$
$$(2,3)_1 = \frac{1}{8}e^5,$$

$$(4,0)_1 = \frac{5}{24}e^5,$$
$$(4,1)_1 = \frac{1}{24}e^5,$$

$$(1,0)_1 = e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5,$$
$$(1,1)_1 = -\frac{3}{16}e^3 - \frac{1}{192}e^5,$$
$$(1,2)_1 = +\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{48}e^5,$$
$$(1,3)_1 = \frac{5}{32}e^5,$$
$$(1,4)_1 = \frac{1}{8}e^5,$$

(*) J'ai fait ces multiplications de deux manières différentes, je crois donc pouvoir répondre de l'exactitude des coefficients suivants.

$$(3, 0)_1 = \frac{1}{2} e^3 - \frac{13}{192} e^5,$$

$$(3, 1)_1 = \qquad - \frac{1}{48} e^5,$$

$$(3, 2)_1 = \qquad \frac{1}{12} e^5,$$

$$(5, 0)_1 = \frac{1}{12} e^5,$$

$$(0, 1)_2 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{6} e^4 + \frac{1}{48} e^6,$$

$$(0, 2)_2 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} e^4 + \frac{55}{192} e^6,$$

$$(0, 3)_2 = \qquad \frac{3}{4} e^4 + \frac{41}{32} e^6,$$

$$(0, 4)_2 = \qquad \frac{1}{4} e^4 + \frac{59}{32} e^6,$$

$$(0, 5)_2 = \qquad \frac{35}{32} e^6,$$

$$(0, 6)_2 = \qquad \frac{15}{64} e^6,$$

$$(2, 0)_2 = - \frac{1}{2} e^2 + \frac{2}{3} e^4 - \frac{157}{1536} e^6,$$

$$(2, 1)_2 = \qquad \frac{1}{2} e^4 - \frac{7}{768} e^6,$$

$$(2, 2)_2 = \qquad 0 e^4 + \frac{619}{1536} e^6,$$

$$(2, 3)_2 = \qquad \frac{17}{64} e^6,$$

$$(2, 4)_2 = \qquad \frac{1}{32} e^6,$$

$$(4, 0)_2 = - \frac{1}{6} e^4 + \frac{197}{768} e^6,$$

$$(4, 1)_2 = \qquad \frac{3}{32} e^6,$$

$$(4, 2)_2 = \qquad - \frac{1}{96} e^6,$$

$$(6, 0)_2 = - \frac{1}{48} e^6,$$

$$(0, 1)_3 = \frac{9}{16} e^3 - \frac{81}{256} e^5,$$

$$(0, 2)_3 = \frac{1}{2} e^3 + \frac{7}{16} e^5,$$

$$(0, 3)_3 = \frac{1}{8} e^3 + \frac{75}{64} e^5,$$

$$(0, 4)_3 = \qquad \frac{3}{4} e^5,$$

$$(0, 5)_3 = \qquad \frac{5}{32} e^5,$$

$$(2, 0)_3 = - \frac{5}{8} e^3 + \frac{81}{96} e^5,$$

$$(2, 1)_3 = - \frac{1}{4} e^3 + \frac{223}{256} e^5,$$

$$(2, 2)_3 = \qquad \frac{3}{32} e^5,$$

$$(2, 3)_3 = \qquad - \frac{1}{16} e^5,$$

$$(4, 0)_3 = - \frac{5}{16} e^5,$$

$$(4, 1)_3 = - \frac{1}{16} e^5,$$

$$(1, 0)_3 = \frac{13}{24} e^3 - \frac{43}{128} e^5,$$

$$(1, 1)_3 = \frac{13}{16} e^3 - \frac{25}{32} e^5,$$

$$(1, 2)_3 = \frac{1}{4} e^3 + \frac{23}{96} e^5,$$

$$(1, 3)_3 = \qquad \frac{39}{64} e^5,$$

$$(1, 4)_3 = \qquad \frac{3}{16} e^5,$$

$(1,0)_2 = \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{48}e^4 + \frac{17}{384}e^6,$

$(1,1)_2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{12}e^4 + \frac{23}{384}e^6,$

$(1,2)_2 = \frac{5}{16}e^4 - \frac{67}{768}e^6,$

$(1,3)_2 = \frac{1}{4}e^4 + \frac{17}{64}e^6,$

$(1,4)_2 = \frac{57}{128}e^6,$

$(1,5)_2 = \frac{5}{32}e^6,$

$(3,0)_2 = \frac{5}{8}e^4 - \frac{593}{3072}e^6,$

$(3,1)_2 = \frac{1}{6}e^4 - \frac{71}{768}e^6,$

$(3,2)_2 = \frac{29}{192}e^6,$

$(3,3)_2 = \frac{1}{16}e^6,$

$(5,0)_2 = \frac{25}{192}e^6,$

$(5,1)_2 = \frac{1}{48}e^6;$

$(3,0)_3 = -\frac{1}{6}e^3 + \frac{307}{384}e^5,$

$(3,1)_3 = \frac{13}{32}e^5,$

$(3,2)_3 = \frac{1}{24}e^5,$

$(5,0)_3 = -\frac{1}{24}e^5,$

$(0,1)_4 = \frac{2}{3}e^4 - \frac{8}{15}e^6,$

$(0,2)_4 = \frac{13}{16}e^4 + \frac{25}{96}e^6,$

$(0,3)_4 = \frac{3}{8}e^4 + \frac{13}{8}e^6,$

$(0,4)_4 = \frac{1}{16}e^4 + \frac{25}{16}e^6,$

$(0,5)_4 = \frac{5}{8}e^6,$

$(0,6)_4 = \frac{3}{32}e^6,$

$(2,0)_4 = -\frac{283}{384}e^4 + \frac{2147}{1920}e^6,$

$(2,1)_4 = -\frac{9}{16}e^4 + \frac{35}{24}e^6,$

$(0,1)_5 = \frac{625}{768}e^5,$

$(0,2)_5 = \frac{59}{48}e^5,$

$(0,3)_5 = \frac{51}{64}e^5,$

$(0,4)_5 = \frac{1}{4}e^5,$

$(0,5)_5 = \frac{1}{32}e^5,$

$(2,0)_5 = -\frac{7}{8}e^5$

$(2,1)_5 = -\frac{739}{768}e^5,$

$(2,2)_5 = -\frac{13}{32}e^5,$

$(2,3)_5 = -\frac{1}{16}e^5,$

$(0,1)_6 = \frac{81}{80}e^6,$

$(0,2)_6 = \frac{115}{64}e^6,$

$(0,3)_6 = \frac{47}{32}e^6,$

$(0,4)_6 = \frac{21}{32}e^6,$

$(0,5)_6 = \frac{5}{32}e^6,$

$(0,6)_6 = \frac{1}{64}e^6,$

$(2,0)_6 = -\frac{24269}{23040}e^6,$

$(2,1)_6 = -\frac{1145}{768}e^6,$

$(2,2)_6 = -\frac{1387}{1536}e^6,$

$(2,2)_4 = -\frac{1}{8}e^4 + \frac{277}{768}e^6,$

$(2,3)_4 = \qquad -\frac{5}{32}e^6,$

$(2,4)_4 = \qquad -\frac{1}{16}e^6,$

$(4,0)_4 = \frac{1}{24}e^4 - \frac{187}{384}e^6,$

$(4,1)_4 = \qquad -\frac{3}{16}e^6,$

$(4,2)_4 = \qquad -\frac{1}{48}e^6,$

$(6,0)_4 = \frac{1}{120}e^6,$

$(1,0)_4 = \frac{103}{192}e^4 - \frac{451}{960}e^6,$

$(1,1)_4 = \frac{55}{48}e^4 - \frac{641}{480}e^6,$

$(1,2)_4 = \frac{21}{32}e^4 - \frac{23}{384}e^6,$

$(1,3)_4 = \frac{1}{8}e^4 + \frac{33}{32}e^6,$

$(1,4)_4 = \qquad \frac{21}{32}e^6,$

$(1,5)_4 = \qquad \frac{1}{8}e^6,$

$(3,0)_4 = -\frac{5}{16}e^4 + \frac{205}{192}e^6,$

$(3,1)_4 = -\frac{1}{12}e^4 + \frac{37}{48}e^6,$

$(3,2)_4 = \qquad \frac{1}{6}e^6,$

$(3,3)_4 = \qquad 0e^6,$

$(5,0)_4 = -\frac{5}{48}e^6,$

$(5,1)_4 = -\frac{1}{60}e^6,$

$(4,0)_5 = \frac{5}{48}e^5,$

$(4,1)_5 = \frac{1}{48}e^5,$

$(1,0)_5 = \frac{1097}{1920}e^5,$

$(1,1)_5 = \frac{299}{192}e^5,$

$(1,2)_5 = \frac{121}{96}e^5,$

$(1,3)_5 = \frac{29}{64}e^5,$

$(1,4)_5 = \frac{1}{16}e^5,$

$(3,0)_5 = -\frac{179}{384}e^5,$

$(3,1)_5 = -\frac{23}{96}e^5,$

$(3,2)_5 = -\frac{1}{24}e^5,$

$(5,0)_5 = \frac{1}{120}e^5,$

$(2,3)_6 = -\frac{17}{64}e^6,$

$(2,4)_6 = -\frac{1}{32}e^6,$

$(4,0)_6 = \frac{433}{2304}e^6,$

$(4,1)_6 = \frac{7}{96}e^6,$

$(4,2)_6 = \frac{1}{96}e^6,$

$(6,0)_6 = -\frac{1}{720}e^6,$

$(1,0)_6 = \frac{1223}{1920}e^6,$

$(1,1)_6 = \frac{1337}{640}e^6,$

$(1,2)_6 = \frac{1645}{768}e^6,$

$(1,3)_6 = \frac{211}{192}e^6,$

$(1,4)_6 = \frac{37}{128}e^6,$

$(1,5)_6 = \frac{1}{32}e^6,$

$(3,0)_6 = -\frac{663}{1024}e^6,$

$(3,1)_6 = -\frac{371}{768}e^6,$

$(3,2)_6 = -\frac{31}{192}e^6,$

$(3,3)_6 = -\frac{1}{48}e^6,$

$(5,0)_6 = \frac{5}{192}e^6,$

$(5,1)_6 = \frac{1}{240}e^6.$

En substituant ces expressions dans les équations de l'article précédent, on peut développer exactement les quantités $\frac{a^n}{r^n}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} mf$ pour chaque valeur quelconque de n et de m jusqu'aux quantités de l'ordre e^7. L'application de ces expressions peut s'effectuer de différentes manières. Ou bien on les substitue, telles qu'elles sont, dans les expressions de l'article précédent, en attribuant successivement à n et à m toutes les valeurs nécessaires; on obtient ainsi $\frac{a^n}{r^n}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} mf$ exprimé explicitement en fonction de l'excentricité, et l'on peut y substituer la valeur numérique propre à chaque cas particulier. Ou bien on substitue d'abord, pour chaque cas particulier, la valeur numérique de l'excentricité dans les expressions qui précèdent, et ensuite celles-ci dans les expressions de l'article précédent. Ou bien encore, on substitue immédiatement les expressions qui précèdent, dans les équations données à l'article précédent pour $(0)_{n,\nu}$, $(1)_{n,\nu}$, etc., et ensuite, dans chaque cas particulier, on substitue la valeur numérique de l'excentricité de la planète. Cette dernière voie est préférable à toute autre, lorsque n est un grand nombre, parce qu'alors beaucoup de valeurs de m sont liées ensemble; or par cette méthode on obtient *une* expression qui comprend toutes les valeurs de m. Lorsque n est un petit nombre, l'avantage de cette méthode n'est pas aussi prononcé, mais dans chaque cas le calcul devient plus commode et plus intelligible; c'est pourquoi je l'ai suivie pour toutes les valeurs de n.

18. Si l'on ne pousse pas les substitutions au delà de ce qui est nécessaire, pour le calcul des perturbations de la comète de *Encke* produites par Saturne, on peut négliger, sans hésiter, les septièmes puissances de l'excentricité, ainsi que les puissances plus élevées, et l'on n'a pas besoin des valeurs de n plus grandes que 7. Dans cette hypothèse on arrive aux expressions suivantes:

$$(0)_{3,0} = \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4,$$
$$(2)_{3,0} = e^2 + \frac{81}{64}e^4,$$
$$(4)_{3,0} = \frac{1}{4}e^4,$$

$$(0)_{3,1} = \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3,$$
$$(2)_{3,1} = \frac{11}{8}e^3,$$
$$(1)_{3,1} = e + \frac{1}{16}e^3,$$
$$(3)_{3,1} = \frac{1}{2}e^3,$$

$(0)_{3,2} = \frac{9}{4}e^2 + \frac{7}{4}e^4,$	$(0)_{4,2} = \frac{7}{2}e^2 + \frac{67}{12}e^4,$
$(2)_{3,2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{13}{6}e^4,$	$(2)_{4,2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{8}{3}e^4,$
$(4)_{3,2} = -\frac{1}{6}e^4,$	$(4)_{4,2} = -\frac{1}{6}e^4,$
$(1)_{3,2} = \frac{17}{8}e^2 - \frac{7}{24}e^4,$	$(1)_{4,2} = \frac{21}{8}e^2 + \frac{47}{48}e^4,$
$(3)_{3,2} = \frac{9}{8}e^4,$	$(3)_{4,2} = \frac{31}{24}e^4,$
$(0)_{3,3} = \frac{53}{16}e^3,$	$(0)_{4,3} = \frac{23}{4}e^3,$
$(2)_{3,3} = -\frac{11}{8}e^3,$	$(2)_{4,3} = -\frac{13}{8}e^3,$
$(1)_{3,3} = \frac{179}{48}e^3,$	$(1)_{4,3} = \frac{127}{24}e^3,$
$(3)_{3,3} = -\frac{1}{6}e^3,$	$(3)_{4,3} = -\frac{1}{6}e^3,$
$(0)_{3,4} = \frac{77}{16}e^4,$	$(0)_{4,4} = \frac{437}{48}e^4,$
$(2)_{3,4} = -\frac{1075}{384}e^4,$	$(2)_{4,4} = -\frac{1435}{384}e^4,$
$(4)_{3,4} = \frac{1}{24}e^4,$	$(4)_{4,4} = \frac{1}{24}e^4,$
$(1)_{3,4} = \frac{1165}{192}e^4,$	$(1)_{4,4} = \frac{1835}{192}e^4,$
$(3)_{3,4} = -\frac{9}{16}e^4,$	$(3)_{4,4} = -\frac{31}{48}e^4,$
$(0)_{4,0} = 3e^2 + \frac{45}{8}e^4,$	$(0)_{5,0} = 5e^2 + \frac{105}{8}e^4,$
$(2)_{4,0} = e^2 + \frac{137}{64}e^4,$	$(2)_{5,0} = e^2 + \frac{209}{64}e^4,$
$(4)_{4,0} = \frac{1}{4}e^4,$	$(4)_{5,0} = \frac{1}{4}e^4,$
$(0)_{4,1} = 2e + \frac{17}{4}e^3,$	$(0)_{5,1} = \frac{5}{2}e + \frac{135}{16}e^3,$
$(2)_{4,1} = \frac{13}{8}e^3,$	$(2)_{5,1} = \frac{15}{8}e^3,$
$(1)_{4,1} = e + \frac{5}{8}e^3,$	$(1)_{5,1} = e + \frac{23}{16}e^3,$
$(3)_{4,1} = \frac{1}{2}e^3,$	$(3)_{5,1} = \frac{1}{2}e^3,$

$(0)_{5,2} = 5e^2 + \frac{155}{12} e^4,$

$(2)_{5,2} = -\frac{1}{2}e^2 + \frac{19}{6} e^4,$

$(4)_{5,2} = -\frac{1}{6} e^4,$

$(1)_{5,2} = \frac{25}{8}e^2 + \frac{159}{48} e^4,$

$(3)_{5,2} = \frac{35}{24} e^4,$

$(0)_{5,3} = \frac{145}{16} e^3,$

$(2)_{5,3} = -\frac{15}{8} e^3,$

$(1)_{5,3} = \frac{341}{48} e^3,$

$(3)_{5,3} = -\frac{1}{6} e^3,$

$(0)_{5,4} = \frac{745}{48} e^4,$

$(2)_{5,4} = -\frac{1843}{384} e^4,$

$(4)_{5,4} = \frac{1}{24} e^4,$

$(1)_{5,4} = \frac{2703}{192} e^4,$

$(3)_{5,4} = -\frac{35}{48} e^4,$

$(0)_{6,0} = \frac{15}{2}e^2 + \frac{105}{4} e^4,$

$(2)_{6,0} = e^2 + \frac{297}{64} e^4,$

$(4)_{6,0} = \frac{1}{4} e^4,$

$(0)_{6,1} = 3e + \frac{117}{8} e^3,$

$(2)_{6,1} = \frac{17}{8} e^3,$

$(1)_{6,1} = e + \frac{5}{2} e^3,$

$(3)_{6,1} = \frac{1}{2} e^3,$

$(0)_{6,2} = \frac{27}{4} e^2 + \frac{101}{4} e^4,$

$(2)_{6,2} = -\frac{1}{2} e^2 + \frac{11}{3} e^4,$

$(4)_{6,2} = -\frac{1}{6} e^4,$

$(1)_{6,2} = \frac{29}{8} e^2 + \frac{257}{48} e^4,$

$(3)_{6,2} = \frac{13}{8} e^4,$

$(0)_{6,3} = \frac{107}{8} e^3,$

$(2)_{6,3} = -\frac{17}{8} e^3,$

$(1)_{6,3} = \frac{55}{6} e^3,$

$(3)_{6,3} = -\frac{1}{6} e^3,$

$(0)_{6,4} = \frac{197}{8} e^4,$

$(2)_{6,4} = -\frac{2299}{384} e^4,$

$(4)_{6,4} = \frac{1}{24} e^4,$

$(1)_{6,4} = \frac{3793}{192} e^4,$

$(3)_{6,4} = -\frac{13}{16} e^4,$

$(0)_{7,0} = \frac{21}{2} e^2 + \frac{189}{4} e^4,$

$(2)_{7,0} = e^2 + \frac{401}{64} e^4,$

$(4)_{7,0} = \frac{1}{4} e^4,$

$(0)_{7,1} = \frac{7}{2} e + \frac{371}{16} e^3,$

$(2)_{7,1} = \frac{19}{8} e^3,$

$(1)_{7,1} = e + \frac{61}{16} e^3,$

$(3)_{7,1} = \frac{1}{2} e^3,$

$$(0)_{1,2} = \frac{35}{4} e^2 + \frac{133}{3} e^4,$$
$$(2)_{1,2} = -\frac{1}{2} e^2 + \frac{25}{6} e^4,$$
$$(4)_{1,2} = \frac{1}{6} e^4,$$
$$(1)_{1,2} = \frac{33}{8} e^2 + \frac{73}{6} e^4,$$
$$(3)_{1,2} = \frac{43}{24} e^4,$$

$$(0)_{1,3} = \frac{301}{16} e^3,$$
$$(2)_{1,3} = -\frac{19}{8} e^3,$$
$$(1)_{1,3} = \frac{551}{48} e^3,$$
$$(3)_{1,3} = -\frac{1}{6} e^3,$$

$$(0)_{1,4} = \frac{889}{24} e^4,$$
$$(2)_{1,4} = -\frac{2803}{384} e^4,$$
$$(4)_{1,4} = \frac{1}{24} e^4,$$
$$(1)_{1,4} = \frac{5129}{192} e^4,$$
$$(3)_{1,4} = -\frac{43}{48} e^4.$$

16. On verra plus bas que pour calculer les perturbations de la longitude et du rayon vecteur, on a besoin des quantités $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$ et $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$; mais on a, d'après l'art. **10**,

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = \sum (1-e^2)^{\frac{l}{2}} k \sin^l u (\cos u - e)^{k-1} C_{k,l},$$
$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \sum (1-e^2)^{\frac{l-1}{2}} l \sin^{l-1} u (\cos u - e)^k C_{k,l}.$$

Avant tout, il faut développer les fonctions de u, que nous venons de donner, en fonction des multiples des sinus et des cosinus de ce même arc. Dans ce but, je donnerai d'abord les relations qui existent entre les coefficients de ces développements. Il faut ici distinguer deux cas.

PREMIER CAS. *Lorsque* l *est un nombre pair.*

Soit

$$(\cos u - e)^k \sin^l u = \alpha_0 + 2\alpha_1 \cos u + 2\alpha_2 \cos 2u + \ldots + 2\alpha_{k+l} \cos (k+l) u.$$

Désignons par l'indice i le terme général, nous aurons, d'après un théorème connu :

$$\text{(A)} \qquad \alpha_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos iu \, du.$$

Soit

$$V = (\cos u - e)^{k+1} \sin^{l+1} u \cos (i-2) u.$$

Cette quantité donne sur-le-champ, par la différentiation :

$$\begin{aligned} dV = &- (k+1)(\cos u - e)^k \sin^{l+1} u \cos (i-2) u \sin u \, du \\ &+ (l+1)(\cos u - e)^{k+1} \sin^l u \cos (i-2) u \cos u \, du \\ &- (i-2)(\cos u - e)^{k+1} \sin^{l+1} u \sin (i-2) u \, du ; \end{aligned}$$

ensuite, par un leger changement,

$$\begin{aligned} dV = &\ \tfrac{1}{4} \left\{ k + l + i \right\} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos iu \, du \\ &- \tfrac{1}{2} e \left\{ l + i - 1 \right\} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos (i-1) u \, du \\ &- \tfrac{1}{2} \left\{ k - l \right\} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos (i-2) u \, du \\ &- \tfrac{1}{2} e \left\{ l - i + 3 \right\} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos (i-3) u \, du \\ &+ \tfrac{1}{4} \left\{ k + l + 4 - i \right\} (\cos u - e)^k \sin^l u \cos (i-4) u \, du . \end{aligned}$$

Si l'on intègre cette expression de o à 2π, en tenant compte de l'équation (A), et remarquant que, prise entre ces limites, $\int dV = 0$, on a

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = (k+l+i)\alpha_i - 2e(l+i-1)\alpha_{i-1} - 2(k-l)\alpha_{i-2} \\ - 2e(l-i+3)\alpha_{i-3} + (k+l-i+4)\alpha_{i-4} \end{aligned} \right.$$

qui est l'équation de condition cherchée. Afin de déterminer quels sont ceux des coefficients α_i qui doivent être donnés pour pouvoir calculer les autres, à l'aide de cette équation de condition, j'ai substitué dans cette même equation les valeurs $i=2$, $i=3$, $i=4$, ce qui donne, en remarquant que $\alpha_{-i} = \alpha_i$,

$$\begin{aligned} (k+l+2)\,\alpha_2 &= 2e(l+1)\,\alpha_1 + (k-l)\alpha_0, \\ (k+l+3)\,\alpha_3 &= 2e(l+2)\,\alpha_2 + (k-3l-1)\,\alpha_1 + 2el\alpha_0, \\ (k+l+4)\,\alpha_4 &= 2e(l+3)\,\alpha_3 + 2(k-l)\alpha_2 + 2e(l-1)\alpha_1 - (k+l)\alpha_0 ; \end{aligned}$$

d'où l'on voit que la connaissance de α_0 et α_1 est nécessaire et suffisante pour pouvoir calculer tous les autres coefficients au moyen de l'équation (B). Pour déterminer ces coefficients, la loi du binôme nous donne

$$\text{(C)} \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^k (\cos u - e)^k = e^k - e^{k-1} k \cos u + e^{k-2} \frac{k.k-1}{1.2} \cos^2 u \\ - e^{k-3} \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3} \cos^3 u \pm \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Multiplions cette expression par $\sin^l u$ et par $\sin^l u \cos u$, intégrons, et negligeons les termes dans lesquels $\cos u$ se trouve élevé à une puissance impaire, parce que leur intégrale serait égale à zéro, nous aurons :

$$(-1)^k\alpha_0 = \frac{e^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^l u\, du + \frac{e^{k-2}}{2\pi}\,\frac{k.k-1}{1.2}\int_0^{2\pi}\sin^l u\cos^2 u\, du$$

$$+\frac{e^{k-4}}{2\pi}\,\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\int_0^{2\pi}\sin^l u\cos^4 u\, du + \text{etc.},$$

$$(-1)^k\alpha_1 = -\frac{e^{k-1}}{2\pi}k\int_0^{2\pi}\sin^l u\cos^2 u\, du - \frac{e^{k-3}}{2\pi}\,\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\int_0^{2\pi}\sin^l u\cos^4 u\, du$$

$$-\frac{e^{k-5}}{2\pi}\,\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\int_0^{2\pi}\sin^l u\cos^6 u\, du - \text{etc.}$$

Mais lorsque p et q sont des nombres pairs, on a, comme on sait,

$$\text{(D)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^q u\cos^p u\, du = \frac{1.3.5\ldots p-1.1.3.5\ldots q-1}{2.4.6.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .q+p}.$$

La substitution de cette expression dans les précédentes donne

$$(-1)^k\alpha_0 = \frac{1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.\ .\ .\ .l}e^k + \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+2}e^{k-2}$$

$$+\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.8.10\ldots l+4}e^{k-4} + \text{etc.},$$

$$(-1)^k\alpha_1 = -k\frac{1.1.3\ldots l-1}{2.4.6\ldots l+2}e^{k-1} - \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+4}e^{k-3}$$

$$-\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8.10\ldots l+4}e^{k-5} - \text{etc.}$$

Au moyen de ces deux équations et de l'équation (B), on peut calculer tous les coefficients du développement. On peut, d'un autre côté, des mêmes équations développées, tirer l'expression générale de α_i et l'employer comme contrôle du calcul.

Si l'on joint au développement (C) les deux équations suivantes:

(a) *Quand* i *est un nombre pair*,

$$\cos iu = 1 - \frac{i^2}{2}\sin^2 u + \frac{i^2.i^2-4}{2.3.4}\sin^4 u - \frac{i^2.i^2-4.i^2-16}{2.3.4.5.6}\sin^6 u \pm \text{etc.};$$

(b) *Quand* i *est un nombre impair*,

$$\cos iu = \cos u - \frac{i^2-1}{2}\sin^2 u\cos u + \frac{i^2-1.i^2-9}{2.3.4}\sin^4 u\cos u$$

$$-\frac{i^2-1.i^2-9.i^2-25}{2.3.4.5.6}\sin^6 u\cos u \pm \text{etc.},$$

on obtient sans peine :

(a) i *étant un nombre pair,*

$$(-1)^k \alpha_i = \frac{1.3\ldots l-1}{2.4\ldots l} e^k \left\{1 - \frac{i^2}{2}\cdot\frac{l+1}{l+2}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+4}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+6}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$+ \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3\ldots l-1}{2.4.6\ldots l+2} e^{k-2} \left\{1 - \frac{i^2}{2}\cdot\frac{l+1}{l+4}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+2}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+8}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$+ \frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+4} e^{k-4} \left\{1 - \frac{i^2}{2}\frac{l+1}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-4}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+8}\left\{1 - \frac{i^2-16}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+10}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$+ \text{etc.};$$

(b) i *étant un nombre impair,*

$$(-1)^k \alpha_i = -k\frac{1.1.3.5\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+2} e^{k-1} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2}\cdot\frac{l+1}{l+4}\left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+8}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$- \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8\ldots l+4} e^{k-3} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2}\cdot\frac{l+1}{l+6}\left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+8}\left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+10}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$- \frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l-1}{2.4.6.8.10\ldots l+6} e^{k-5} \left\{1 - \frac{i^2-1}{2}\cdot\frac{l+1}{l+8}\left\{1 - \frac{i^2-9}{3.4}\cdot\frac{l+3}{l+10}\left\{1 - \frac{i^2-25}{5.6}\cdot\frac{l+5}{l+12}\left\{1 - \text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$
$$+ \text{etc.}$$

Second cas. *Lorsque* l *est un nombre impair.*

Soit

$$(\cos u - e)^k \sin^l u = 2\beta_1 \sin u + 2\beta_2 \sin 2u + \ldots + 2\beta_{k+l} \sin\,(k+)\,lu.$$

Nous avons maintenant

$$\beta_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos u - e)^k \sin^l u \sin iu \, du;$$

si ensuite nous faisons

$$V = (\cos u - e)^{k+1} \sin^{l+1} u \sin(i-2)u,$$

et si nous traitons cette quantité comme nous l'avons fait dans le cas précédent, nous arriverons à la même équation, savoir :

$$(E)\ \left\{\begin{aligned} 0 = (k+l+i)\beta_i - 2e(l+i-1)\beta_{i-1} - 2(k-l)\beta_{i-2} \\ - 2e(l-i+3)\beta_{i-3} + (k+l-i+4)\beta_{i-4}. \end{aligned}\right.$$

Comme ici $\beta_{-i} = -\beta_i$ et $\beta_0 = 0$, les relations particulières qui résultent de là pour les valeurs initiales de i, deviennent un peu différentes de celles du cas précédent. La substitution de $i = 2$ donne bien la même équation, mais $i = 3$ et $i = 4$ donnent les suivantes :

$$(k+l+3)\beta_3 = 2e(l+2)\beta_2 + (3k-l+1)\beta_1,$$
$$(k+l+4)\beta_4 = 2e(l+3)\beta_3 + 2(k-l)\beta_2 + 2e(l-1)\beta_1;$$

d'où l'on voit que nous avons besoin de connaître les coefficients β_1 et β_2 pour calculer tous les autres au moyen de la relation (E). Le développement (C) nous donne d'abord, pour ces coefficients, les expressions suivantes :

$$(-1)^k \beta_1 = \frac{c^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u\, du + \frac{c^{k-2}}{2\pi}\cdot\frac{k.k-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^2 u\, du + \text{etc.},$$

$$(-1)^k \beta_2 = -2\frac{c^{k-1}}{2\pi}k\int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^2 u\, du$$
$$-2\frac{c^{k-3}}{2\pi}\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\int_0^{2\pi} \sin^{l+1} u \cos^4 u\, du - \text{etc.},$$

dans lesquelles nous pouvons employer les équations (D), parce qu'ici $l+1$ est un nombre pair ; nous avons ainsi :

$$(-1)^k \beta_1 = \frac{1.3.5\ldots l}{2.4.6\ldots l+1}c^k + \frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3.5\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+3}c^{k-2}$$
$$+\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3.5\ldots l}{2.4.6\ldots l+5}c^{k-4} + \text{etc.},$$

$$(-1)^k \beta_2 = -2k\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}c^{k-1} - 2\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}c^{k-3}$$
$$-2\frac{k.k-1.k-2.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l}{2.4.6.8.10\ldots l+7}c^{k-5} - \text{etc.}$$

Pour trouver l'expression de β_i, on se sert des deux équations suivantes :

(a) *Quand* i *est un nombre impair*,

$$\sin iu = i\sin u - \frac{i.i^2-1}{2.3}\sin^3 u + \frac{i.i^2-1.i^2-9}{2.3.4.5}\sin^5 u$$
$$-\frac{i.i^2-1.i^2-9.i^2-25}{2.3.4.5.6.7}\sin^7 u \pm \text{etc.};$$

(b) *Quand* i *est un nombre pair*,

$$\sin iu = i\sin u\cos u - \frac{i.i^2-4}{2.3}\sin^3 u\cos u + \frac{i.i^2-4.i^2-16}{2.3.4.5}\sin^5 u\cos u$$
$$-\frac{i.i^2-4.i^2-16.i^2-36}{2.3.4.5.6.7}\sin^7 u\cos u \pm \text{etc.};$$

d'où l'on déduit :

(a) i *étant impair,*

$$\ldots)^k \beta_i = i\frac{1.3\ldots l}{2.4\ldots l+1}e^k\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+3}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+7}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+i\frac{k.k-1}{1.2}\cdot\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}e^{k-2}\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+9}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$+i\frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}e^{k-4}\left\{1-\frac{i^2-1}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-9}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-25}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+11}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$+$ etc.;

(b) i *étant pair,*

$$\ldots)^k \beta_i = -ik\frac{1.1.3\ldots l}{2.4.6\ldots l+3}e^{k-1}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+5}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+9}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$-i\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{1.3.1.3\ldots l}{2.4.6.8\ldots l+5}e^{k-3}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+7}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+11}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$-i\frac{k.k-1.k-3.k-4}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.3.5.1.3\ldots l}{2.4.6.8.10\ldots l+7}e^{k-5}\left\{1-\frac{i^2-4}{2.3}\cdot\frac{l+2}{l+9}\left\{1-\frac{i^2-16}{4.5}\cdot\frac{l+4}{l+11}\left\{1-\frac{i^2-36}{6.7}\cdot\frac{l+6}{l+13}\left\{1-\text{etc.}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$-$ etc.

17. Au moyen des expressions développées dans l'article précédent, on peut toujours avec sûreté, calculer les coefficients du développement de α_i et de β_i dont il s'agit. Cependant je ne passerai point sous silence une autre méthode qui conduit au même but, avec autant et peut-être même avec plus de simplicité Elle consiste à calculer les coefficients du développement, relatifs aux exposants $k+1$ et l, ainsi que ceux relatifs aux exposants k et $l+1$, d'après ceux relatifs aux exposants k et l. Si l'on fait d'abord $k=1$ et $l=0$, puis $k=0$ et $l=1$, on pourra ensuite de cette manière, calculer successivement tous les coefficients du développement des quantités $\cos u - e$ et $\sin u$. Je suppose que pour des valeurs quelconques des exposants k et l, que je nommerai respectivement p et q, on ait trouvé

$$(\cos u - e)^p \sin^q u$$
$$= [0] + 2[1]\cos u + 2[2]\cos 2u + \ldots + 2[p+q-1]\cos(p+q-1)u$$
$$+ 2[p+q]\cos(p+q)u;$$

alors

$$(\cos u - e)^p \sin^{q+1} u$$
$$= \{[0]-[2]\}\sin u + \{[1]-[3]\}\sin 2u + \{[2]-[4]\}\sin 3u + \ldots$$
$$+ \{[p+q-2]-[p+q]\}\sin(p+q-1)u + [p+q-1]\sin(p+q)u$$
$$+ [p+q]\sin(p+q+1)u,$$

$$(\cos u - e)^{p+1}\sin^q u$$
$$= \{[1]-[0]e\} + \{[2]+[0]-2[1]e\}\cos u + \{[3]+[1]-2[2]e\}\cos 2u + \ldots$$
$$+ \{[p+q]+[p+q-2]-2[p+q-1]e\}\cos(p+q-1)u$$
$$+ \{[p+q-1]-2[p+q]e\}\cos(p+q)u + [p+q]\cos(p+q+1)u.$$

On avait

$$(\cos u - e)^p \sin^q u$$
$$= 2[1]\sin u + 2[2]\sin 2u + \ldots + 2[p+q-1]\sin(p+q-1)u$$
$$+ 2[p+q]\sin(p+q)u,$$

on aura

$$(\cos u - e)^p \sin^{q+1} u$$
$$= [1] + [2]\cos u + \{[3]-[1]\}\cos 2u + \{[4]-[2]\}\cos 3u + \ldots$$
$$+ \{[p+q]-[p+q-2]\}\cos(p+q-1)u - [p+q-1]\cos(p+q)u$$
$$- [p+q]\cos(p+q+1)u,$$

$$(\cos u - e)^{p+1}\sin^q u$$
$$= \{[2]-2[1]e\}\sin u + \{[3]+[1]-2[2]e\}\sin 2u + \{[4]+[2]-2[3]e\}\sin 3u \ldots$$
$$+ \{[p+q]+[p+q-2]-2[p+q-1]e\}\sin(p+q-1)u$$
$$+ \{[p+q-1]-2[p+q]e\}\sin(p+q)u + [p+q]\sin(p+q+1)u.$$

En appliquant cette méthode, si l'on vient à commettre une faute de calcul, elle se propage dans toutes les quantités que l'on doit calculer ensuite, et rend tous les résultats vicieux. Pour découvrir ces fautes ou les prévenir, il est bon de vérifier de temps en temps les coefficients déjà calculés, en se servant des équations de condition (B) et (E) de l'article précédent, ou bien de calculer directement un certain nombre de coefficients au moyen des expressions développées dans ce même article; on obtient ainsi des points de comparaison déterminés, qui peuvent servir à vérifier l'exactitude du calcul.

18. Maintenant, si l'on pose

$$U_{k,l} = (\cos u - e)^k \sin^l u,$$

et si l'on substitue, au lieu du second membre de cette équation, son développement calculé par la méthode de l'article précédent, on aura, d'après l'art. 10,

$$(A)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dx}\right) = \Sigma\,(1-e^2)^{\frac{l}{2}}\,k\,U_{k-1,l}C_{k,l}, \\ \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dy}\right) = \Sigma\,(1-e^2)^{\frac{l-1}{2}}\,l\,U_{k,l-1}C_{k,l}. \end{cases}$$

Ces expressions sont respectivement de la forme

$$\Sigma\left\{\gamma+\gamma_1\cos u+\gamma_2\cos 2u+\text{etc...}\right\}C_{k,l},$$

et

$$\Sigma\left\{\delta_1\ \sin u+\ \delta_2\ \sin\ 2u\ +\ \text{etc.....}\right\}C_{k,l}.$$

Après avoir substitué la valeur numérique de l'excentricité de l'orbite de la comète, dans les expressions des coefficients γ, γ_1, etc., δ_1, δ_2, etc., on multiplie ces coefficients par ceux des quantités $C_{k,l}$, calculés par la méthode des art. 13, 14 et 15. Les quotients différentiels de Ω prennent ainsi la forme suivante :

$$(B)\quad \begin{cases} \quad\ \Sigma\left\{\lambda+\lambda_1\cos u+\lambda_2\cos 2u+\text{etc.}\right\}\cos i'g' \\ +\,\Sigma\left\{\nu_1\sin u+\nu_2\sin 2u+\text{etc.}\right\}\cos i'g' \\ +\,\Sigma\left\{\rho+\rho_1\cos u+\rho_2\cos 2u+\text{etc.}\right\}\sin i'g' \\ +\,\Sigma\left\{\sigma_1\sin u+\sigma_2\sin 2u+\text{etc.}\right\}\sin i'g', \end{cases}$$

λ, λ_1, etc., etc., étant des coefficients numériques. On change cette expression en la suivante :

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\left\{\begin{aligned} &\text{etc.}+\tfrac{1}{2}(\rho_2-\nu_2)\sin(-2u+i'g') \\ &+\tfrac{1}{2}(\rho_1-\nu_1)\sin(-\ u+i'g') \\ &+\rho\sin i'g'+\tfrac{1}{2}(\rho_1+\nu_1)\sin(u+i'g') \\ &+\tfrac{1}{2}(\rho_2+\nu_2)\sin(2u+i'g')+\text{etc.} \end{aligned}\right\} \\ +\,&\Sigma\left\{\begin{aligned} &\text{etc.}+\tfrac{1}{2}(\lambda_2+\sigma_2)\cos(-2u+i'g') \\ &+\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\sigma_1)\cos(-\ u+i'g') \\ &+\lambda\cos i'g'+\tfrac{1}{2}(\lambda_1-\sigma_1)\cos(u+i'g') \\ &+\tfrac{1}{2}(\lambda_2-\sigma_2)\cos(2u+i'g')+\text{etc.} \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right.$$

On arrive ainsi à la forme demandée dans l'art. 11.

19. Pour le calcul des perturbations de la comète de Encke, produites par Saturne, je me suis servi des quantités $U_{k,l}$ jusqu'à $k+l=5$, et j'ai

trouvé :

$$U_{1,0} = -e + \cos u,$$

$$U_{0,1} = \sin u,$$

$$U_{2,0} = \left(\frac{1}{2} + e^2\right) - 2e\cos u + \frac{1}{2}\cos 2u,$$

$$U_{1,1} = -e\sin u + \frac{1}{2}\sin 2u,$$

$$U_{0,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u,$$

$$U_{3,0} = -\left(\frac{3}{2}e + e^3\right) + \left(\frac{3}{4} + 3e^2\right)\cos u - \frac{3}{2}e\cos 2u + \frac{1}{4}\cos 3u,$$

$$U_{2,1} = \left(\frac{1}{4} + e^2\right)\sin u - e\sin 2u + \frac{1}{4}\sin 3u,$$

$$U_{1,2} = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{4}\cos u + \frac{1}{2}e\cos 2u - \frac{1}{4}\cos 3u,$$

$$U_{0,3} = \frac{3}{4}\sin u - \frac{1}{4}\sin 3u,$$

$$U_{4,0} = \left(\frac{3}{8} + 3e^2 + e^4\right) - (3e + 4e^3)\cos u + \left(\frac{1}{2} + 3e^2\right)\cos 2u - e\cos 3u + \frac{1}{8}\cos 4u,$$

$$U_{3,1} = -\left(\frac{3}{4}e + e^3\right)\sin u + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}e^2\right)\sin 2u - \frac{3}{4}e\sin 3u + \frac{1}{8}\sin 4u,$$

$$U_{2,2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}e^2\right) - \frac{1}{2}e\cos u - \frac{1}{2}e^2\cos 2u + \frac{1}{2}e\cos 3u - \frac{1}{8}\cos 4u,$$

$$U_{1,3} = -\frac{3}{4}e\sin u + \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{4}e\sin 3u - \frac{1}{8}\sin 4u,$$

$$U_{0,4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{8}\cos 4u,$$

$$U_{5,0} = -\left(\frac{15}{8}e + 5e^3 + e^5\right) + \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{2}e^2 + 5e^4\right)\cos u - \left(\frac{5}{2}e + 5e^3\right)\cos 2u + \left(\frac{5}{16} + \frac{5}{2}e^2\right)\cos 3u - \frac{5}{8}e\cos 4u + \frac{1}{16}\cos 5u,$$

$$U_{4,1} = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2}e^2 + e^4\right)\sin u - (e + 2e^3)\sin 2u + \left(\frac{3}{16} + \frac{3}{2}e^2\right)\sin 3u - \frac{1}{2}e\sin 4u + \frac{1}{16}\sin 5u,$$

$$U_{3,2} = -\left(\frac{3}{8}e + \frac{1}{2}e^3\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^2\right)\cos u + \frac{1}{2}e^2\cos 2u$$
$$-\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}e^2\right)\cos 3u + \frac{3}{8}e\cos 4u - \frac{1}{16}\cos 5u,$$
$$U_{2,3} = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}e^2\right)\sin u - \frac{1}{2}e\sin 2u$$
$$+\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}e^2\right)\sin 3u + \frac{1}{4}e\sin 4u - \frac{1}{16}\sin 5u,$$
$$U_{1,4} = -\frac{3}{8}e + \frac{1}{8}\cos u + \frac{1}{2}e\cos 2u - \frac{3}{16}\cos 3u - \frac{1}{8}e\cos 4u + \frac{1}{16}\cos 5u,$$
$$U_{0,5} = \frac{5}{8}\sin u - \frac{5}{16}\sin 3u + \frac{1}{16}\sin 5u.$$

Dans le cas où l'on aurait besoin de pousser plus loin, on peut relier le développement à ce qui précède, et le continuer aussi loin que l'on voudra. On peut remarquer, que dans chaque groupe où $k + l$ a la même valeur, les premières quantités $U_{k,l}$ sont celles qui exercent la plus grande influence, car, par suite de l'expression (A) de l'article précédent, les quantités de chaque groupe de la série doivent être multipliées par

$$(1-e^2)^0, \quad (1-e^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1-e^2), \quad (1-e^2)^{\frac{3}{2}}, \quad (1-e^2)^2, \text{ etc.}$$

Or, ces facteurs deviennent d'autant plus petits, que l'excentricité de l'orbite de la comète est plus grande.

20. On verra plus bas que, pour le calcul des perturbations de la latitude, nous aurons, avant tout, besoin de la quantité

$$a\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\frac{\sin(f+N+K)}{r}$$
$$+\frac{a}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\cot\tfrac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\tang\tfrac{1}{2}I\right]\frac{\cos(f+N+K)}{r}.$$

De même que $\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ expriment respectivement les composantes de la force perturbatrice, parallèles au grand axe et au petit axe de l'orbite de la comète, de même la quantité précédente exprime la composante de cette même force, qui est perpendiculaire à l'orbite de la comète. Je la désignerai donc, dans la suite, par $-\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$. Nous allons maintenant la développer, et disposer notre développement de telle sorte que nous puissions

nous servir du plus grand nombre possible des quantités du développement qui précède.

Comme I, N et K ne se trouvent que dans A et B, il faut donc différentier Ω par rapport à ces quantités; mais on n'arriverait pas de cette manière au résultat le plus simple : il est plus avantageux de différentier Ω par rapport à H.

Nous avons ainsi

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = -a\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dH}{dI}\right)\frac{\sin(f+N+K)}{r}\\ +\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dH}{d\nu}\right)\cot\frac{1}{2}I - \left(\frac{dH}{dk}\right)\tang\frac{1}{2}I\right]\frac{\cos(f+N+K)}{r}\end{array}\right\};$$

mais, par suite de l'art. 7,

$$H = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f-f'+2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f+f'+2N).$$

Ainsi,

$$(X)\quad\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dH}{dI}\right) = -\sin I\sin(f+N+K)\sin(f'+N-K),\\ \left(\frac{dH}{d\nu}\right) = -2\sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f+f'+2N),\\ \left(\frac{dH}{dk}\right) = -2\cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f-f'+2K);\end{array}\right.$$

et par conséquent,

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I\sin(f'+N-K).$$

Or, par suite de l'art. 8, on a

$$A = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'-2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f'+2N),$$
$$B = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'-2K) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f'+2N);$$

d'où il suit

$$A\sin(N+K) + B\cos(N+K) = \cos I\sin(f'+N-K).$$

Ainsi,

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)A\tang I\sin(N+K) + \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)B\tang I\cos(N+K).$$

Prenons maintenant la quantité

$$X = (1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}},$$

donnée dans l'art. 9; cela nous conduit à

$$\frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) = (1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right) = (A - \xi)(1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left(\frac{dX}{dA}\right) = \xi(1 - 2A\xi - 2B\eta + \xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en conclut

$$A\left(\frac{dX}{dH}\right)\frac{r'}{r} = \left(\frac{dX}{d\xi}\right) + \left(\frac{dX}{dA}\right);$$

on a de même

$$B\left(\frac{dX}{dH}\right)\frac{r'}{r} = \left(\frac{dX}{d\eta}\right) + \left(\frac{dX}{dB}\right);$$

par conséquent on aura

$$\frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) A \operatorname{tang} I \sin(N+K) + \frac{r'}{r}\left(\frac{dX}{dH}\right) B \operatorname{tang} I \cos(N+K)$$
$$= \left(\frac{dX}{d\xi}\right) \operatorname{tang} I \sin(N+K) + \left(\frac{dX}{d\eta}\right) \operatorname{tang} I \cos(N+K) + Y,$$

en faisant

$$Y = \left(\frac{dX}{dA}\right) \operatorname{tang} I \sin(N+K) + \left(\frac{dX}{dB}\right) \operatorname{tang} I \cos(N+K).$$

Posons encore

$$\text{(A)} \qquad K_{i,i'} = \left(\frac{dD_{i,i'}}{dA}\right) \operatorname{tang} I \sin(N+K) + \left(\frac{dD_{i,i'}}{dB}\right) \operatorname{tang} I \cos(N+K);$$

d'où nous conclurons

$$Y = \Sigma \xi^i \eta^{i'} K_{i,i'};$$

et si nous passons maintenant de la fonction X à la fonction perturbatrice Ω, nous aurons l'équation

$$\text{(Z)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \operatorname{tang} I \sin(N+K) \\ &+ \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) \operatorname{tang} I \cos(N+K) + Z, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle

$$Z = \Sigma x^k y^l N_{k,l},$$

$$(\text{B}) \qquad N_{k,l} = \frac{m'}{M+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{n}{a'}\right)^{k+l+2} \left(\frac{n'}{r'}\right)^{k+l+2} \cdot K_{k,l}.$$

Sous le signe *somme* dans Z sont aussi compris les termes pour lesquels $k+l=1$. Le développement du quotient différentiel de la fonction perturbatrice relatif à z, se réduit donc ainsi au développement de la fonction désignée par Z, et à la multiplication des quotients différentiels relatifs à x et à y par des facteurs constants. Le facteur par lequel il faut multiplier $K_{k,l}$ pour obtenir $N_{k,l}$, contient les mêmes fonctions de $\frac{n'}{r'}$, dont on a fait usage dans le développement des quotients différentiels de la fonction perturbatrice relatifs à x et à y. Il ne nous reste plus qu'à calculer les quotients différentiels de la quantité $D_{k,l}$ relatifs à A et à B, dont on a besoin pour le calcul de $K_{k,l}$.

21. L'expression générale donnée pour $D_{k,l}$ dans l'art. **9** montre, au premier coup d'œil, que les quotients différentiels de cette quantité relatifs à A et à B, peuvent s'exprimer par des fonctions linéaires de cette quantité même.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right) = \alpha D_{k-1,l} &+ \beta D_{k-1,l-2} + \gamma D_{k-1,l-4} + \delta D_{k-1,l-6} + \text{etc.}\\ &+ \beta' D_{k-3,l} + \gamma' D_{k-3,l-2} + \delta' D_{k-3,l-4} + \text{etc.}\\ &+ \gamma'' D_{k-5,l} + \delta'' D_{k-5,l-2} + \text{etc.}\\ &+ \delta''' D_{k-7,l} + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.},\end{aligned}$$

α, β, β', γ, etc., étant ici des coefficients indéterminés. Substituant dans cette équation les valeurs de $D_{k,l}$, $D_{k-1,l}$, $D_{k-1,l-2}$, etc., données dans l'art. **9**, et comparant les termes qui sont multipliés par les mêmes puissances de A et de B, on trouve pour déterminer les coefficients α, β, etc., d'abord les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= 2n-1,\\ \beta &= -\tfrac{1}{2}(2n-3)(2n-5) + \tfrac{1}{2}\alpha(2n-5),\\ \beta' &= -\tfrac{1}{2}(2n-3)(2n-5) + \tfrac{1}{2}\alpha(2n-5),\\ \gamma &= \tfrac{1}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1.2} - \tfrac{1}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1.2} + \tfrac{1}{2}\beta(2n-9),\\ \gamma' &= \tfrac{2}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1.2} - \tfrac{2}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1.2} - \tfrac{1}{2}\beta(2n-9) + \tfrac{1}{2}\beta'(2n-9),\end{aligned}$$

$$\gamma'' = \tfrac{1}{4}\frac{(2n-5)(2n-7)(2n-9)}{1.2} - \tfrac{1}{4}\alpha\frac{(2n-7)(2n-9)}{1.2} + \tfrac{1}{2}\beta'(2n-9),$$

$$\delta = -\tfrac{1}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3} + \tfrac{1}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3}$$
$$- \tfrac{1}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2} + \tfrac{1}{2}\gamma(2n-13),$$

$$\delta' = -\tfrac{3}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3} + \tfrac{3}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3}$$
$$- \tfrac{2}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2} - \tfrac{1}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma(2n-13) + \tfrac{1}{2}\gamma'(2n-13),$$

$$\delta'' = -\tfrac{3}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3} + \tfrac{3}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3}$$
$$- \tfrac{1}{4}\beta\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2} - \tfrac{2}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\gamma'(2n-13) + \tfrac{1}{2}\gamma''(2n-13),$$

$$\delta''' = -\tfrac{1}{8}\frac{(2n-7)(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3} + \tfrac{1}{8}\alpha\frac{(2n-9)(2n-11)(2n-13)}{1.2.3}$$
$$- \tfrac{1}{4}\beta'\frac{(2n-11)(2n-13)}{1.2} + \tfrac{1}{2}\gamma''(2n-13),$$

où, pour abréger, on a fait $n = k + l$. Ensuite, par des substitutions successives, on arrive aux expressions simples des coefficients cherchés

$$\alpha = 2(k+l)-1,\ \beta = 2(k+l)-5,\ \gamma = 2(k+l)-9,\ \delta = 2(k+l)-13, \text{ etc.};$$
$$\beta' = 2(k+l)-5,\ \gamma' = 2[2(k+l)-9],\ \delta' = 3[2(k+l)-13], \text{ etc.};$$
$$\gamma'' = 2(k+l)-9,\ \delta'' = 3[2(k+l)-13], \text{ etc.};$$
$$\delta''' = 2(k+l)-13, \text{ etc.};$$
etc.

La loi de la serie est évidente. Comme, dans ces expressions, k et l ne se présentent point isolés, mais seulement par leur somme, nous aurons immédiatement

$$\left(\frac{dD_{k,l}}{dB}\right) = \alpha D_{k,l-1} + \beta D_{k,l-3} + \gamma D_{k,l-5} + \delta D_{k,l-7} + \text{etc.}$$
$$+ \beta' D_{k-2,l-1} + \gamma' D_{k-2,l-3} + \delta' D_{k-2,l-5} + \text{etc.}$$
$$+ \gamma'' D_{k-4,l-1} + \delta'' D_{k-4,l-3} + \text{etc.}$$
$$+ \delta''' D_{k-6,l-1} + \text{etc.}$$
etc.,

les coefficients α, β, β', γ, etc., ayant ici les mêmes valeurs que plus haut. Il suit de là que

$$\left(\frac{d\,D_{k,l}}{d\,B}\right) = \left(\frac{d\,D_{k+1,l-1}}{d\,A}\right);$$

c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de calculer en particulier les quotients différentiels relatifs à B. Cette même équation se déduit encore facilement de la relation établie dans l'article précédent entre les quotients différentiels de la quantité X.

Au moyen des expressions trouvées ci-dessus, nous arrivons aux quotients différentiels dont on a besoin pour calculer les perturbations de la comète de Encke produites par Saturne, comme il suit :

$$\left(\frac{d\,D_{1,0}}{dA}\right) = D_{0,0} = 1,$$

$$\left(\frac{d\,D_{0,1}}{dA}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,D_{2,0}}{dA}\right) = 3\,D_{1,0} = 3A,$$

$$\left(\frac{d\,D_{1,1}}{dA}\right) = 3\,D_{0,1} = 3B,$$

$$\left(\frac{d\,D_{0,2}}{dA}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,D_{1,0}}{dA}\right) = 5\,D_{2,0} + 1,$$

$$\left(\frac{d\,D_{2,1}}{dA}\right) = 5\,D_{1,1},$$

$$\left(\frac{d\,D_{1,2}}{dA}\right) = 5\,D_{0,2} + 1,$$

$$\left(\frac{d\,D_{0,3}}{dA}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,D_{4,0}}{dA}\right) = 7\,D_{1,0} + 3A,$$

$$\left(\frac{d\,D_{3,1}}{dA}\right) = 7\,D_{2,1} + 3B,$$

$$\left(\frac{d\,D_{2,2}}{dA}\right) = 7\,D_{1,2} + 3A,$$

$$\left(\frac{d\,D_{1,3}}{dA}\right) = 7\,D_{0,} + 3B,$$

$$\left(\frac{dD_{6,1}}{dA}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dD_{5,0}}{dA}\right) = 9D_{4,0} + 5D_{3,0} + 1,$$

$$\left(\frac{dD_{4,1}}{dA}\right) = 9D_{3,1} + 5D_{1,1},$$

$$\left(\frac{dD_{3,2}}{dA}\right) = 9D_{2,2} + 5D_{0,2} + 5D_{2,0} + 2,$$

$$\left(\frac{dD_{2,3}}{dA}\right) = 9D_{1,3} + 5D_{1,1},$$

$$\left(\frac{dD_{1,4}}{dA}\right) = 9D_{0,4} + 5D_{0,2} + 1,$$

$$\left(\frac{dD_{0,5}}{dA}\right) = 0.$$

22. Au moyen de la relation trouvée dans l'article précédent, entre les quotients différentiels de la quantité $D_{k,l}$, relatifs à A et à B, l'expression (A) de l'art. **20** se change en la suivante :

$$K_{k,l} = \left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right) \operatorname{tang} I \sin(N+K) + \left(\frac{dD_{k+1,l-1}}{dA}\right) \operatorname{tang} I \cos(N+K).$$

En appliquant cette dernière relation, l'expression (B) de l'art. **20** donnera les quantités $N_{k,l}$, et l'on obtiendra Z au moyen de l'expression suivante :

$$(\Theta) \qquad Z = \Sigma (1 - e^2)^{\frac{l}{2}} U_{k,l} N_{k,l},$$

où l'on substituera le développement de la quantité $U_{k,l}$ de l'art. **18**.

23. Avant d'aller plus loin, je vais appliquer les développements précédents au calcul des perturbations de la comète de Encke, produites par Saturne. Dans le n° **423** des *Astron. Nachr.*, j'ai montré que l'on peut prendre pour base du calcul des perturbations d'une planète, ses éléments osculateurs; et comme les propositions que j'y ai développées s'appliquent également au cas actuel, j'ai employé ici les éléments osculateurs de la comète, correspondants à l'époque 1829, janvier 9,72 temps moyen de Paris, publiés dans l'*Annuaire astronomique de Berlin* pour 1840, page 272. Cependant, comme je l'ai fait voir dans le numero cité plus haut, il est préférable de déduire le moyen mouvement dont on a besoin, ainsi que le grand axe de l'ellipse qui s'ensuit, des longitudes observées, et aussi éloignées que possible, ou bien des valeurs osculatrices correspondantes de l'époque de la longitude moyenne.

C'est ce que j'ai fait ici ; j'ai ainsi obtenu les éléments suivants de la comète, auxquels je joins les éléments de l'orbite de Saturne, correspondant au même instant, et que j'ai tirés des Tables de Saturne de M. *Bouvard*.

Comète de Encke.	Saturne.
$\frac{m}{M} = 0$	$\frac{m'}{M} = \frac{1}{3512}$
$n = 391809'',9$	$n' = 43996'',1269$
$\log a = 0,3463475$	$\log a' = 0,9794960$
$e = 0,8446760$	$e' = 0,0560605$
$\omega = 182°48'55'',8$	$\omega' = 337°30'55'',4$
$\theta = 334.29.28,8$	$\theta' = 112.10.59,0$
$i = 13.20.40,2$	$i' = 2.29.31,4$

Dans ces valeurs du moyen mouvement n et n', l'année julienne est prise pour unité de temps. Je n'ai pas ajouté le sixième élément, l'époque de l'anomalie moyenne, parce qu'on ne s'en sert pas dans le calcul des perturbations.

Le premier travail consiste à calculer les quantités I, ν et k à l'aide des équations de l'art. 7. On trouve

$$I = 15°16'41'',4$$
$$\Psi = 216.\ 7.40,2$$
$$\Phi = 353.37.22,6$$
$$\nu = 155.17.24,2, \quad 2\nu = 310°34'48'',4$$
$$k = 33.54.\ 9,0, \quad 2k = 67.48.18,0$$
$$\nu + k = 189.11.33,2$$

Ces valeurs de ν et de k sont celles de N et de K, correspondantes à l'époque indiquée; elles doivent être substituées partout dans les expressions précédentes; j'ai trouvé ainsi (art. 8) :

$$\log l = 9,9996149$$
$$\log l' = 9,9847865$$
$$L = 67°29'7'',4$$
$$L' = 68.\ 8.8,6$$

et par suite, les huit valeurs particulières suivantes de A et de B :

f'.	Log A.	Log B.
0°	9,58272	9,95237n
$22\frac{1}{2}$	9,84921	9,83903n
45	9,96528	9,57907n
$67\frac{1}{2}$	9,99961	8,02943n
90	9,96518	9,55583
$112\frac{1}{2}$	9,84898	9,82941
135	9,58217 ·	9,94838
$157\frac{1}{2}$	6,418..n	9,98476

Ensuite on peut, à l'aide des expressions des art. 9 et 12, calculer les valeurs suivantes de la quantité $D_{k,l}$:

$D_{k,\,l}$.

k, l.	Cos $0f'$.	Cos f', Sin f'.	Cos $2f'$, Sin $2f'$.	Cos $3f'$, Sin $3f'$.	Cos $4f'$, Sin $4f'$.	Cos $5f'$, Sin $5f'$.	Cos $6f'$, Sin $6f'$.
2, 0	+ 0,2487	....	− 0,5291				
			+ 0,5297				
1, 1	− 0,0164	....	− 1,0121				
			− 1,0343				
0, 2	+ 0,1993	....	+ 0,5053				
			− 0,4834				
3, 0	....	+ 0,1422	....	− 0,5761			
		+ 0,3431	....	− 0,2381			
2, 1	....	− 0,3488	....	+ 0,7092			
		+ 0,0958	....	− 1,6623			
1, 2	....	+ 0,1317	....	+ 1,5986			
		+ 0,2142	....	+ 0,7036			
0, 3	....	− 0,2224	....	− 0,2325			
		+ 0,0893	....	+ 0,5125			
4, 0	+ 0,1381	....	− 0,2177	....	− 0,0006		
			+ 0,2180	....	− 0,5449		
3, 1	− 0,0307	....	− 0,3827	....	+ 2,1065		
			− 0,4594	....	+ 0,0217		
2, 2	+ 0,1848	....	+ 0,1564	....	− 0,0660		
			− 0,0167	....	+ 3,0530		
1, 3	− 0,0259	....	− 0,2543	....	− 1,9665		
			− 0,1960	....	− 0,0649		
0, 4	+ 0,0530	....	+ 0,1108	....	+ 0,0211		
			− 0,1061	....	− 0,4749		
5, 0	....	+ 0,0874	....	− 0,2479	....	+ 0,4524	
		+ 0,2108	....	− 0,1024	....	− 0,1881	
4, 1	....	− 0,2322	....	+ 0,3550	....	+ 0,8842	
		+ 0,0162	....	− 0,6951	....	+ 2,1966	
3, 2	....	+ 0,1576	....	+ 0,5283	....	− 4,2647	
		+ 0,1999	....	+ 0,4054	....	+ 1,6606	
2, 3	....	− 0,2409	....	− 0,1165	....	− 1,5580	
		+ 0,0351	....	− 0,1244	....	− 4,1395	
1, 4	....	+ 0,0647	....	+ 0,2937	....	+ 2,0088	
		+ 0,0117	....	+ 0,0763	....	− 0,7302	
0, 5	....	− 0,0314	....	− 0,0398	....	+ 0,1368	
		+ 0,0125	....	+ 0,0877	....	+ 0,3899	

$D_{k,l}$.							
k, l.	Cos $0f'$.	Cos f', Sin f'.	Cos $2f'$, Sin $2f'$.	Cos $3f'$, Sin $3f'$.	Cos $4f'$, Sin $4f'$.	Cos $5f'$, Sin $5f'$.	Cos $6f'$, Sin $6f'$.
6, 0	+ 0,094	....	− 0,140	....	0,000	....	+ 0,318
			+ 0,141	....	− 0,240	....	+ 0,317
5, 1	− 0,045	....	− 0,211	....	+ 0,929	....	− 1,859
			− 0,331	....	+ 0,068	....	+ 1,823
4, 2	+ 0,151	....	+ 0,130	....	− 0,257	....	− 4,352
			+ 0,096	....	+ 1,282	....	− 4,539
3, 3	− 0,071	....	− 0,225	....	− 0,618	....	+ 5,912
			− 0,210	....	− 0,357	....	− 5,540
2, 4	+ 0,044	....	+ 0,198	....	+ 0,215	....	+ 3,966
			− 0,028	....	+ 0,149	....	+ 4,330
1, 5	− 0,028	....	− 0,023	....	− 0,230	....	− 1,692
			+ 0,057	....	+ 0,044	....	+ 1,516
0, 6	− 0,015	....	− 0,009	....	+ 0,003	....	− 0,241
			+ 0,009	....	− 0,055	....	− 0,275

La disposition de la Table doit être comprise de la manière suivante : par exemple,

$$D_{3,1} = -\ 0,0307 - 0,3827 \cos 2f' - 0,4594 \sin 2f'$$
$$+\ 2,1065 \cos 4f' + 0,0217 \sin 4f',$$

ainsi de suite. Les valeurs numériques précédentes donnent encore

$$A = +\ 0,38258 \cos f' + 0,92296 \sin f',$$
$$B = -\ 0,89613 \cos f' + 0,35959 \sin f'.$$

De cette manière, les expressions des art. **21** et **22**, pour les quotients différentiels de $D_{k,l}$ et pour les quantités $K_{k,l}$, donnent les valeurs suivantes:

$$\left(\frac{dD_{k,l}}{dA}\right).$$

k, l.	Cos $0f'$.	Cos f', Sin f'.	Cos $2f'$, Sin $2f'$.	Cos $3f'$, Sin $3f'$.	Cos $4f'$, Sin $4f'$.
1, 0	1				
0, 1	0				
2, 0	....	+ 1,1477			
		+ 2,7689			
1, 1	....	− 2,6884			
		+ 1,0788			
0, 2	....	0			
3, 0	+ 2,2435	....	− 2,6455		
			+ 2,6485		
2, 1	− 0,0820	....	− 5,0605		
			− 5,1715		
1, 2	+ 1,9965	....	+ 2,5265		
			− 2,4170		
0, 3	0	....	0		
4, 0	....	+ 2,143	....	− 4,033	
		+ 5,171	....	− 1,667	
3, 1	....	− 5,130	....	+ 4,964	
		+ 1,749	....	−11,636	
2, 2	....	+ 2,070	....	+11,190	
		+ 4,268	....	+ 4,925	
1, 3	....	− 4,245	....	− 1,628	
		+ 1,704	....	+ 3,588	
0, 4	....	0	....	0	
5, 0	+ 3,487	....	− 4,605	....	− 0,005
			+ 4,611	....	− 4,904
4, 1	− 0,358	....	− 8,505	....	+18,958
			− 9,307	....	+ 0,195
3, 2	+ 5,904	....	+ 1,289	....	− 0,594
			+ 0,082	....	+27,477
2, 3	− 0,315	....	− 7,350	....	−17,698
			− 6,936	....	− 0,584
1, 4	+ 2,474	....	+ 3,524	....	+ 0,190
			− 3,372	....	− 4,274
0, 5	0	....	0	....	0

$K_{k,l}$.

k, l.	Cos $0f'$.	Cos f', Sin f'.	Cos $2f'$, Sin $2f'$.	Cos $3f'$, Sin $3f'$.	Cos $4f'$, Sin $4f'$.
1, 0	− 0,0436				
0, 1	− 0,2696				
2, 0	....	− 0,0501			
		− 0,1208			
1, 1	....	− 0,1922			
		− 0,7938			
0, 2	....	+ 0,7252			
		− 0,2909			
3, 0	− 0,0979	....	+ 0,1154		
			− 0,1156		
2, 1	− 0,6013	....	+ 0,9342		
			− 0,4885		
1, 2	− 0,0650	....	+ 1,2542		
			+ 1,5002		
0, 3	− 0,5384	....	− 0,6814		
			+ 0,6508		
4, 0	....	− 0,094	....	+ 0,176	
		− 0,226		+ 0,073	
3, 1	....	− 0,354	....	+ 0,870	
		− 1,471		+ 0,958	
2, 2	....	+ 1,293	....	− 1,827	
		− 0,658		+ 2,922	
1, 3	....	− 0,373	....	− 2,946	
		− 1,225		− 1,484	
0, 4	....	+ 1,145	....	+ 0,439	
		− 0,459		− 0,968	
5, 0	− 0,151	....	+ 0,201	....	0,000
			− 0,201		+ 0,214
4, 1	− 0,924	....	+ 1,613	....	− 0,827
			− 0,838		+ 1,314
3, 2	− 0,161	....	+ 2,237	....	− 5,087
			+ 2,505		− 1,252
2, 3	− 1,578	....	− 0,027	....	+ 0,933
			+ 0,281		− 7,385
1, 4	− 0,023	....	+ 1,828	....	+ 4,765
			+ 2,017		+ 0,344
0, 5	− 0,667	....	− 0,950	....	− 0,051
			+ 0,909		+ 1,152

24. Nous obtenons ensuite, en multipliant l'expression (1) de l'art. **12** par le nombre de secondes (206265″), qui est la longueur du rayon du cercle exprimé en secondes:

$$\log \mu_3 = 0,14085,$$
$$\log \mu_4 = 9,50771 - 10,$$
$$\log \mu_5 = 8,87456 - 10,$$
$$\log \mu_6 = 8,24141 - 10,$$
$$\log \mu_7 = 7,60826 - 10.$$

En substituant la valeur numérique de l'exceutricité de l'orbite de Saturne donnée plus haut, dans l'expression de l'art. **15**, on est conduit aux valeurs numériques suivantes, pour les quantités développées dans ce même article.

$(0)_{3,0} = + 0,004733$	$(0)_{4,0} = + 0,009484$
$(2)_{3,0} = + 0,0031552$	$(2)_{4,0} = + 0,0031639$
$(4)_{3,0} = + 0,00000245$	$(4)_{4,0} = + 0,00000245$
$(0)_{3,1} = + 0,084388$	$(0)_{4,1} = + 0,112870$
$(2)_{3,1} = + 0,0002422$	$(2)_{4,1} = + 0,0002863$
$(1)_{3,1} = + 0,0560715$	$(1)_{4,1} = + 0,0561706$
$(3)_{3,1} = + 0,0000881$	$(3)_{4,1} = + 0,00008809$
$(0)_{3,2} = + 0,007088$	$(0)_{4,2} = + 0,011055$
$(2)_{3,2} = - 0,0015500$	$(2)_{4,2} = - 0,0015450$
$(4)_{3,2} = - 0,00000165$	$(4)_{4,2} = - 0,00000165$
$(1)_{3,2} = + 0,0066753$	$(1)_{4,2} = + 0,0082592$
$(3)_{3,2} = + 0,0000111$	$(3)_{4,2} = + 0,0000131$
$(0)_{3,3} = + 0,000584$	$(0)_{4,3} = + 0,001013$
$(2)_{3,3} = - 0,0002422$	$(2)_{4,3} = - 0,0002863$
$(1)_{3,3} = + 0,0006571$	$(1)_{4,3} = + 0,0009324$
$(3)_{3,3} = - 0,0000294$	$(3)_{4,3} = - 0,00002936$
$(0)_{3,4} = + 0,000048$	$(0)_{4,4} = + 0,000090$
$(2)_{3,4} = - 0,0000277$	$(2)_{4,4} = - 0,0000369$
$(4)_{3,4} = + 0,00000042$	$(4)_{4,4} = + 0,00000042$
$(1)_{3,4} = + 0,0000600$	$(1)_{4,4} = + 0,0000944$
$(3)_{3,4} = - 0,0000056$	$(3)_{4,4} = - 0,0000064$

$(0)_{5,0} = +\ 0{,}01584$
$(2)_{5,0} = +\ 0{,}003175$
$(4)_{5,0} = +\ 0{,}0000025$

$(0)_{5,1} = +\ 0{,}14164$
$(2)_{5,1} = +\ 0{,}000330$
$(1)_{5,1} = +\ 0{,}056314$
$(3)_{5,1} = +\ 0{,}0000881$

$(0)_{5,2} = +\ 0{,}01584$
$(2)_{5,2} = -\ 0{,}001540$
$(4)_{5,2} = -\ 0{,}0000016$
$(1)_{5,2} = +\ 0{,}009853$
$(3)_{5,2} = +\ 0{,}0000144$

$(0)_{5,3} = +\ 0{,}00160$
$(2)_{5,3} = -\ 0{,}000330$
$(1)_{5,3} = +\ 0{,}001252$
$(3)_{5,3} = -\ 0{,}0000294$

$(0)_{5,4} = +\ 0{,}00015$
$(2)_{5,4} = -\ 0{,}000047$
$(4)_{5,4} = +\ 0{,}0000004$
$(1)_{5,4} = +\ 0{,}000140$
$(3)_{5,4} = -\ 0{,}000007$

$(0)_{6,0} = +\ 0{,}02383$
$(2)_{6,0} = +\ 0{,}003189$
$(4)_{6,0} = +\ 0{,}0000025$

$(0)_{6,1} = +\ 0{,}17076$
$(2)_{6,1} = +\ 0{,}000374$
$(1)_{6,1} = +\ 0{,}056500$
$(3)_{6,1} = +\ 0{,}0000881$

$(0)_{6,2} = +\ 0{,}02146$
$(2)_{6,2} = -\ 0{,}001535$
$(4)_{6,2} = -\ 0{,}0000016$
$(1)_{6,2} = +\ 0{,}011445$
$(3)_{6,2} = +\ 0{,}0000161$

$(0)_{6,3} = +\ 0{,}00235$
$(2)_{6,3} = -\ 0{,}000374$
$(1)_{6,3} = +\ 0{,}001615$
$(3)_{6,3} = -\ 0{,}0000294$

$(0)_{6,4} = +\ 0{,}00024$
$(2)_{6,4} = -\ 0{,}000059$
$(4)_{6,4} = +\ 0{,}0000004$
$(1)_{6,4} = +\ 0{,}000195$
$(3)_{6,4} = -\ 0{,}0000080$

$(0)_{7,0} = +\ 0{,}03347$
$(2)_{7,0} = +\ 0{,}003205$
$(4)_{7,0} = +\ 0{,}0000025$

$(0)_{7,1} = +\ 0{,}20029$
$(2)_{7,1} = +\ 0{,}000419$
$(1)_{7,1} = +\ 0{,}056731$
$(3)_{7,1} = +\ 0{,}0000881$

$(0)_{7,2} = +\ 0{,}02794$
$(2)_{7,2} = -\ 0{,}001530$
$(4)_{7,2} = -\ 0{,}0000016$
$(1)_{7,2} = +\ 0{,}013085$
$(3)_{7,2} = +\ 0{,}0000174$

$(0)_{7,3} = +\ 0{,}00331$
$(2)_{7,3} = -\ 0{,}000419$
$(1)_{7,3} = +\ 0{,}002023$
$(3)_{7,3} = -\ 0{,}0000294$

$(0)_{7,4} = +\ 0{,}00037$
$(2)_{7,4} = -\ 0{,}000072$
$(4)_{7,4} = +\ 0{,}0000004$
$(1)_{7,4} = +\ 0{,}000264$
$(3)_{7,4} = -\ 0{,}0000087$

Substituant ces valeurs dans l'expression générale trouvée à l'art. 13 pour $\frac{a^n}{r^n}\binom{\cos}{\sin} mf$, on obtient

$$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} \cos 2f' = -(8,5883)\cos g' + (0,13743)\cos 2g' + (9,4306)\cos 3g'$$
$$+ (8,5646)\cos 4g' + (7,6325)\cos 5g' + (6,659)\cos 6g',$$

$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} \sin 2f' =$ mêmes coefficients, mais ils sont multipliés par les sinus de g', $2g'$, etc.;

$$\mu_3 \frac{a'^3}{r'^3} = (0,14290) + (9,3682)\cos g' + (8,2924)\cos 2g' + (7,208)\cos 3g'$$
$$+ (6,123)\cos 4g',$$

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \cos 3f' = (6,131)\cos g' - (8,2546)\cos 2g' + (9,4995)\cos 3g'$$
$$+ (8,9492)\cos 4g' + (8,200)\cos 5g' + (7,364)\cos 6g' + (6,462)\cos 7g',$$

$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \sin 3f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus;

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \cos f' = (8,2597) + (9,5123)\cos g' + (8,7356)\cos 2g' + (7,827)\cos 3g'$$
$$+ (6,862)\cos 4g' + (5,870)\cos 5g',$$

$$\mu_4 \frac{a'^4}{r'^4} \sin f' = + (9,5058)\sin g' + (8,7337)\sin 2g' + (7,827)\sin 3g'$$
$$+ (6,862)\sin 4g' + (5,870)\sin 5g',$$

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \cos 4f' = (6,197)\cos 2g' - (7,796)\cos 3g' + (8,8593)\cos 4g'$$
$$+ (8,426)\cos 5g' + (7,773)\cos 6g'$$
$$+ (7,015)\cos 7g' + (6,176)\cos 8g',$$

$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \sin 4f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus;

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \cos 2f' = (6,255)\cos 0g' + (7,328)\cos g' + (8,8758)\cos 2g'$$
$$+ (8,276)\cos 3g' + (7,494)\cos 4g'$$
$$+ (6,623)\cos 5g' + (5,708)\cos 6g',$$

$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} \sin 2f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus;

$$\mu_5 \frac{a'^5}{r'^5} = (8,8815) + (8,327)\cos g' + (7,375)\cos 2g' + (6,380)\cos 3g',$$

$$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos 5f' = (5,801)\cos 3g' - (7,283)\cos 4g' + (8,217)\cos 5g'$$
$$+ (7,878)\cos 6g' + (7,299)\cos 7g' + (6,611)\cos 8g',$$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin 5f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus ;

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos 3f' = (5,334) \cos g' + (4,672) \cos 2g' + (8,2393) \cos 3g'$
$+ (7,766) \cos 4g' + (7,081) \cos 5g' + (6,297) \cos 6g',$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin 3f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus ;

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \cos f' = (7,298) + (8,255) \cos g' + (7,599) \cos 2g' + (6,779) \cos 3g'$
$+ (5,882) \cos 4g',$

$\mu_6 \frac{a'^6}{r'^6} \sin f' = \qquad (8,245) \sin g' + (7,595) \sin 2g' + (6,779) \sin 3g'$
$+ (5,882) \sin 4g',$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 6f' = (5,397) \cos 4g' - (6,742) \cos 5g' + (7,573) \cos 6g'$
$+ (7,313) \cos 7g' + (6,801) \cos 8g' + (6,174) \cos 9g',$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 6f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus ;

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 4f' = -(6,049) \cos 3g' + (7,601) \cos 4g' + (7,226) \cos 5g'$
$+ (6,622) \cos 6g' + (5,909) \cos 7g',$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 4f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus ;

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \cos 2f' = (5,511) \cos 0g' + (6,542) \cos g' + (7,617) \cos 2g'$
$+ (7,102) \cos 3g' + (6,386) \cos 4g' + (5,577) \cos 5g',$

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} \sin 2f' =$ mêmes coefficients, mais sinus au lieu de cosinus ;

$\mu_7 \frac{a'^7}{r'^7} = (7,623) + (7,211) \cos g' + (6,355) + \cos 2g' + (5,428) \cos 3g'.$

Dans ces valeurs, les coefficients sont déjà exprimés en secondes ; mais au lieu des coefficients eux-mêmes, on a mis leurs logarithmes, parce qu'on en aura besoin dans les calculs suivants. Je dois ajouter que pour tous les logarithmes contenus dans les expressions ci-dessus, et dont la caractéristique est un nombre différent de zéro, il faut sous-entendre que — 10 doit être ajouté à la partie entière ; ou, en d'autres termes, que ces logarithmes correspondent à des nombres moindres que l'unité.

23. Si l'on multiplie maintenant les coefficients des expressions développées dans l'article précédent, par les coefficients respectifs des quantités $D_{i,i}$ et $K_{i,i}$, qui ont été développés plus haut dans les articles qui précèdent, on aura ainsi, par suite de l'art. **12**, les quantités $C_{i,i}$ et $N_{i,i}$ comme il suit :

$C_{k,l}$.

k, l.	Cos 0g'.	Cos g', Sin g'.	Cos 2g', Sin 2g'.	Cos 3g', Sin 3g'.	Cos 4g', Sin 4g'.	Cos 5g', Sin 5g'.	Cos 6g', Sin 6g'.	Cos 7g', Sin 7g'.
2, 0	9,5386	8,893	9,8580n	9,1538n	8,292 n	7,326n		
		8,304 n	9,8614	9,1555	8,292	7,326		
1, 1	8,3577n	8,540	0,1425n	9,4365n	8,573 n	7,607n		
		8,595	0,1518n	9,4459n	8,583 n	7,617n		
0, 2	9,4424	8,437	9,8433	9,1360	8,272	7,306		
		8,264	9,8216n	9,1157n	8,252 n	7,286n		
3, 0	7,415	8,165	8,259	9,2575n	8,711 n	7,961n	7,123n	
		9,0440	8,359	8,863 n	8,323 n	7,578n	6,739n	
2, 1	7,805 n	9,0548n	8,502 n	9,3545	8,799	8,052	7,212	
		8,490	8,546	9,7194n	9,1704n	8,422n	7,583n	
1, 2	7,382	8,632	8,335 n	9,7039	9,1538	8,405	7,566	
		8,8394	7,015 n	9,3495	8,7983	8,048	7,209	
0, 3	7,610 n	8,8595n	7,899 n	8,8746n	8,319 n	7,568n	6,728n	
		8,460	7,642 n	9,2106	8,660	7,911	7,072	
4, 0	8,0200	7,394	8,205 n	7,615 n	6,843 n	″	″	″
		6,660	8,215	7,998	8,587 n	8,164n	7,507n	6,690n
3, 1	7,381 n	7,163 n	8,459 n	8,473 n	9,1787	8,751	8,095	7,278
		6,984 n	8,538 n	7,951 n	6,007	6,648	6,108	″
2, 2	8,1490	7,628	8,086	7,564	7,631 n	7,248n	6,591n	″
		″	7,099 n	8,518 n	9,3432	8,913	8,256	7,439
1, 3	7,304 n	7,035 n	8,281 n	8,211	9,1548n	8,722n	8,065n	7,248n
		6,614 n	8,168 n	7,479 n	7,725 n	7,240n	6,583n	″
0, 4	7,607	7,132	7,927	7,273	7,274	6,752	6,095	″
		6,348 n	7,902 n	7,488	8,539 n	8,105n	7,448n	6,631n
5, 0	6,243	7,200	6,544	7,634 n	7,369 n	7,856	7,536	6,935
		7,569	6,926	7,218 n	6,336 n	7,508n	7,155n	6,553n
4, 1	6,637 n	7,624 n	6,968 n	7,780	6,458	8,177	7,828	7,226
		6,455	″	8,082 n	7,926 n	8,549	8,220	7,621
3, 2	6,499	7,456	6,799	7,963	8,063	8,843n	8,507n	7,909n
		7,548	6,903	7,855	6,986 n	8,445	8,104	7,499
2, 3	6,683 n	7,640 n	6,984 n	7,336 n	7,388	8,413n	8,074n	7,472n
		6,790	6,147	7,335 n	7,878	8,835n	8,498n	7,896n
1, 4	6,112	7,069	6,413	7,708	7,366 n	8,544	8,184	7,582
		6,313	″	7,123	7,279	8,077n	7,744n	7,142n
0, 5	5,798 n	6,755 n	6,099 n	6,840 n	6,702 n	7,353	7,017	6,415
		6,342	″	7,183	6,444 n	7,815	7,472	6,870
6, 0	6,596	6,184	6,763 n	6,250 n	″	6,242n	7,072	6,811
		″	6,766	6,253	6,981 n	6,762n	7,031	6,810
5, 1	6,276 n	″	6,941 n	6,600 n	7,569	7,413	7,815n	7,578n
		6,025 n	7,137 n	6,624 n	6,284	6,948n	7,831	7,570
4, 2	6,802	6,390	6,731	6,218	7,011 n	7,292	8,211n	7,947n
		″	6,599	″	7,708	7,668	8,213n	7,962n
3, 3	6,474 n	6,062 n	6,969 n	6,301 n	7,392 n	7,631n	8,337	8,081
		″	6,949 n	6,436 n	7,153 n	7,388	8,316n	8,052n
2, 4	6,206	″	6,914	6,401	6,933	7,259n	8,171	7,907
		″	6,064 n	″	6,774	7,328n	8,208	7,945
1, 5	6,070 n	″	5,979 n	″	6,963 n	6,730	7,804n	7,536n
		″	6,373	″	6,244	6,879n	7,750	7,489
0, 6	5,799 n	″	″	″	″	6,122	6,952n	6,691n
		″	″	″	6,341 n	″	7,009n	6,748n

$N_{k,\,l}$.

k, l.	Cos 0g'.	Cos g', Sin g'.	Cos 2g', Sin 2g'.	Cos 3g', Sin 3g'.	Cos 4g', Sin 4g'.	Cos 5g', Sin 5g'.	Cos 6g', Sin 6g'.
1, 0	8,782 n	8,007 n ″	6,931 n ″				
0, 1	9,5737n	8,799 n ″	7,723 n ″				
2, 0	6,962 n	8,212 n 8,591 n	7,436 n 7,816 n	″ 6,908 n	″ ″		
1, 1	7,546 n	8,796 n 9,408 n	8,020 n 8,634 n	7,110 n 7,726 n	″ 6,678 n		
0, 2	8,1230	9,373 8,972 n	8,596 8,198 n	7,686 7,290 n	″ ″		
3, 0	7,871 n	7,265 n 6,386 n	7,924 7,940 n	7,337 7,341 n	6,565 6,569 n	″ ″	
2, 1	8,6589n	8,034 n 7,010 n	8,837 8,564 n	8,244 7,965 n	7,475 7,193 n	6,417 6,165 n	
1, 2	7,674 n	7,097 7,498	8,973 9,052	8,375 8,453	7,603 7,681	6,575 6,653	
0, 3	8,6138n	8,110 n 7,136	8,720 n 8,690	8,115 n 8,091	7,339 n 7,219	6,311 n 6,291	
4, 0	6,274 n	7,231 n 7,599 n	6,575 n 6,956 n	7,485 7,054	7,008 6,626	6,328 ″	″ ″
3, 1	6,850 n	7,807 n 8,412 n	7,151 n 7,769 n	8,174 8,198	7,703 7,744	7,023 7,064	6,241 6,282
2, 2	7,412	8,369 8,064 n	7,713 7,421 n	8,492 n 8,702	8,025 n 8,228	7,345 n 7,548	6,563 n 6,766
1, 3	6,873 n	7,830 n 8,333 n	7,174 n 7,690 n	8,712 n 8,424 n	8,233 n 7,935 n	7,553 n 7,255 n	5,771 n 6,473 n
0, 4	7,359	8,316 7,907 n	7,660 7,264 n	7,919 8,233 n	7,405 7,749 n	6,725 7,069 n	5,943 6,287 n
5, 0	6,801 n	6,263 n 5,808 n	6,920 6,920 n	6,407 6,455 n	″ 6,931	″ 6,557	″ 5,963
4, 1	7,584 n	6,994 n 6,428 n	7,811 7,540 n	7,336 7,096 n	7,464 n 7,702	7,144 n 7,345	6,550 n 6,751
3, 2	6,785 n	6,658 6,904	7,967 8,016	7,549 7,526	8,296 n 7,642 n	7,934 n 7,309 n	7,340 n 6,730 n
2, 3	7,821 n	7,409 n 5,954	6,671 n 7,066	6,116 n 7,143	7,571 8,468 n	7,197 8,095 n	6,603 7,501 n
1, 4	5,439 n	6,767 6,810	7,879 7,922	7,220 7,401	8,289 7,269	7,905 6,763	7,311 6,169
0, 5	7,451 n	7,142 n 6,464	7,611 n 7,576	7,079 n 6,998	6,635 n 7,682	5,935 n 7,288	″ 6,694

Ici, comme dans l'article precedent, on a mis les logarithmes des coefficients au lieu des coefficients eux-mêmes.

26. Pour aller plus loin, nous avons besoin des valeurs numériques des fonctions de u introduites dans l'art. **18** et désignées par $U_{k,l}$; ce sont les facteurs de $C_{k,l}$, et par suite de $N_{k,l}$, dans les expressions des quotients différentiels de la fonction perturbatrice. Si l'on substitue la valeur numérique de l'excentricité de l'orbite cométaire, indiquée à l'art. **23**, dans les expressions de ces fonctions développées à l'art. **19**, et si on les multiplie par les puissances convenables de $1-e^2$, on arrive à

$$U_{1,0} = -(9,92669) + (0,00000) \cos u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} U_{0,1} = (9,72858) \sin u,$$

$$U_{2,0} = (0,08404) - (0,22772) \cos u + (9,69897) \cos 2u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} U_{1,1} = -(9,65527) \sin u + (9,42755) \sin 2u,$$

$$(1-e^2)\, U_{0,2} = (9,15613) - (9,15613) \cos 2u,$$

$$U_{3,0} = -(0,27182) + (0,46102) \cos u - (0,10278) \cos 2u + (9,39794) \cos 3u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} U_{2,1} = (9,71241) \sin u - (9,65527) \sin 2u + (9,12652) \sin 3u,$$

$$(1-e^2)\, U_{1,2} = -(9,08282) + (8,85510) \cos u + (9,08282) \cos 2u - (8,85510) \cos 3u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}} U_{0,3} = (9,06080) \sin u - (8,58368) \sin 3u,$$

$$U_{4,0} = (0,4807) - (0,6941) \cos u + (0,4217) \cos 2u - (9,9267) \cos 3u + (9,0969) \cos 4u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} U_{3,1} = -(9,8207) \sin u + (9,8492) \sin 2u - (9,5303) \sin 3u + (8,8255) \sin 4u,$$

$$(1-e^2)\, U_{2,2} = (9,1400) - (9,0838) \cos u - (9,0095) \cos 2u + (9,0838) \cos 3u - (8,5541) \cos 4u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}} U_{1,3} = -(8,9875) \sin u + (8,5837) \sin 2u + (8,5104) \sin 3u - (8,2827) \sin 4u,$$

$$(1-e^2)^2\, U_{0,4} = (8,4884) - (8,6133) \cos 2u + (8,0112) \cos 4u,$$

$$U_{5,0} = -(0,7013) + (0,9305) \cos u - (0,7097) \cos 2u + (0,3214) \cos 3u - (9,7226) \cos 4u + (8,7959) \cos 5u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{1}{2}} U_{4,1} = (9,9601) \sin u - (0,0403) \sin 2u + (9,8282) \sin 3u - (9,3542) \sin 4u + (8,5245) \sin 5u,$$

$$(1-e^2)\, U_{3,2} = -(9,2482) + (9,2768) \cos u + (8,9362) \cos 2u - (9,2336) \cos 3u + (8,9579) \cos 4u - (8,2530) \cos 5u,$$

$$(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{U}_{2,3} = \quad (9{,}0054)\sin u - (8{,}8114)\sin 2u - (8{,}2497)\sin 3u$$
$$+ (8{,}5104)\sin 4u - (7{,}9816)\sin 5u\,,$$

$$(1-e^2)^{3}\mathrm{U}_{1,4} = -(8{,}4150) + (8{,}0112)\cos u + (8{,}5400)\cos 2u - (8{,}1873)\cos 3u$$
$$-(7{,}9379)\cos 4u + (7{,}7102)\cos 5u\,,$$

$$(1-e^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{U}_{0,5} = \quad (8{,}439)\sin u - (8{,}138)\sin 3u + (7{,}439)\sin 5u,$$

où l'on a pareillement donné les logarithmes des coefficients, parce qu'ils doivent servir dans les calculs suivants. Maintenant, si l'on multiplie les coefficients de ces expressions, par les coefficients donnés dans l'article précédent pour $C_{i,l}$ et $N_{i,l}$, on obtient, par suite des formules développées aux art. **18**, **20** et **22**, les valeurs numériques des quotients différentiels de la fonction perturbatrice. En effet, à l'aide des expressions (A) de l'art. **18**, on arrive à

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) \quad \text{et à} \quad \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right);$$

et, au moyen de l'expression (Θ) de l'art. **22**, on obtient Z. Ces expressions ont d'abord la forme (B) de l'art. **18** ; puis ensuite, comme on l'indique dans ce même article, on les met sous la forme (C), qui est celle que l'on demande à l'art. **11**. Cela fait, on obtient

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right),$$

au moyen de l'expression (Z) de l'art. **20**.

	$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$.		$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$.	
	$(iu+i'g')$		$(iu+i'g')$	
i, i'.	Cos	Sin	Sin	Cos
0,0	−0″,6657			+0″,0143
1,0	+0,8173	−0″,0100	+0″,3115	−0,0187
2,0	−0,0558	−0,0004	−0,0124	+0,0008
3,0	+0,0124	−0,0008	+0,0038	−0,0002
4,0	−0,0010	+0,0001	−0,0003	0,0000
−3,1	−0,002	−0,010	+0,001	0,000
−2,1	+0,043	+0,137	−0,009	+0,004
−1,1	−0,045	−0,410	−0,004	+0,099
0,1	+0,038	+0,501	+0,019	−0,210
1,1	−0,037	−0,280	−0,014	+0,147
2,1	+0,025	+0,066	+0,014	−0,038
3,1	−0,002	−0,005	−0,001	+0,002
−3,2	−0,022	+0,017	−0,006	−0,002
−2,2	+0,106	−0,040	+0,045	+0,010
−1,2	−1,280	+1,150	−1,189	−1,070
0,2	+1,421	−1,273	+1,316	+1,194
1,2	−0,478	+0,387	−0,404	−0,354
2,2	+0,032	−0,016	+0,021	+0,008
3,2	−0,004	+0,003	−0,003	−0,002
−4,3	−0,004	−0,002	−0,002	+0,001
−3,3	+0,013	+0,025	+0,006	−0,015
−2,3	−0,340	−0,205	−0,317	+0,183
−1,3	+0,510	+0,614	+0,478	−0,579
0,3	−0,370	−0,570	−0,347	+0,543
1,3	+0,169	+0,201	+0,158	−0,193

	$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$.		$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$.	
	$(iu+i'g')$		$(iu+i'g')$	
i, i'.	Cos	Sin	Sin	Cos
2,3	−0″,039	−0″,025	−0″,035	+0″,023
3,3	+0,002	+0,003	+0,002	−0,001
−4,4	−0,002	+0,005	−0,002	−0,003
−3,4	+0,013	−0,082	+0,011	+0,075
−2,4	−0,117	+0,214	−0,110	−0,202
−1,4	+0,202	−0,233	+0,191	+0,219
0,4	−0,157	+0,158	−0,149	−0,148
1,4	+0,066	−0,076	+0,061	+0,074
2,4	−0,013	+0,023	−0,012	−0,023
3,4	+0,001	−0,004	+0,001	+0,003
−4,5	+0,013	−0,002	+0,012	+0,003
−3,5	−0,057	−0,013	−0,056	+0,010
−2,5	+0,095	+0,049	+0,092	−0,045
−1,5	−0,091	−0,069	−0,093	+0,064
0,5	+0,060	+0,050	+0,059	−0,048
1,5	−0,028	−0,023	−0,033	+0,021
2,5	+0,009	+0,007	+0,011	−0,004
3,5	−0,002	−0,001	−0,002	+0,001
−4,6	−0,005	−0,011	−0,005	+0,011
−3,6	0,000	+0,029	−0,001	−0,029
−2,6	+0,011	−0,039	+0,011	+0,038
−1,6	−0,013	+0,032	−0,015	−0,032
0,6	+0,007	−0,021	+0,009	+0,019
1,6	−0,003	+0,011	−0,005	−0,011
2,6	+0,001	−0,005	+0,002	+0,004

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\,Z.$$

i, i'.	$(iu+i'g')$ Sin	$(iu+i'g')$ Cos	i, i'.	$(iu+i'g')$ Sin	$(iu+i'g')$ Cos
0,0		+ 0″,0695	1,2	+ 0″,015	+ 0″,020
1,0	− 0″,2309	− 0,0856	2,2	− 0,007	− 0,008
2,0	+ 0,0238	+ 0,0087	3,2	+ 0,001	+ 0,001
3,0	− 0,0068	− 0,0023	− 3,3	+ 0,004	− 0,008
− 3,1	+ 0,001	+ 0,006	− 2,3	+ 0,003	+ 0,012
− 2,1	− 0,001	− 0,067	− 1,3	− 0,012	− 0,006
− 1,1	+ 0,048	+ 0,076	0,3	+ 0,011	− 0,003
0,1	− 0,074	+ 0,028	1,3	− 0,006	+ 0,005
1,1	+ 0,039	− 0,060	2,3	+ 0,002	− 0,002
2,1	− 0,017	+ 0,021	− 3,4	+ 0,005	+ 0,002
3,1	+ 0,001	− 0,002	− 2,4	− 0,005	+ 0,001
− 3,2	− 0,014	− 0,006	− 1,4	+ 0,003	− 0,005
− 2,2	+ 0,034	− 0,003	0,4	− 0,001	+ 0,006
− 1,2	− 0,022	+ 0,027	1,4	+ 0,001	− 0,003
0,2	− 0,009	− 0,031			

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right).$$

i, i'.	$(iu+i'g')$ Sin	$(iu+i'g')$ Cos	i, i'.	$(iu+i'g')$ Sin	$(iu+i'g')$ Cos	i, i'.	$(iu+i'g')$ Sin	$(iu+i'g')$ Cos
0,0		+0″,0948	0,2	−0″,308	−0″,414	1,4	−0″,012	−0″,025
1,0	−0″,3145	−0,1163	1,2	+0,107	+0,137	2,4	+0,002	+0,006
2,0	+0,0271	+0,0109	2,2	−0,013	−0,011	−4,5	−0,003	−0,001
3,0	−0,0078	−0,0023	3,2	+0,002	+0,002	−3,5	+0,015	−0,001
−3,1	+0,001	+0,006	−3,3	+0,001	−0,004	−2,5	−0,027	+0,008
−2,1	−0,004	−0,070	−2,3	+0,098	−0,023	−1,5	+0,028	−0,013
−1,1	+0,067	+0,051	−1,3	−0,168	+0,129	0,5	−0,018	+0,011
0,1	−0,102	+0,083	0,3	+0,130	−0,134	1,5	+0,010	−0,005
1,1	+0,055	−0,098	1,3	−0,058	+0,052	2,5	−0,003	+0,001
2,1	−0,024	+0,031	2,3	+0,013	−0,007	−3,6	−0,001	+0,008
3,1	+0,001	−0,002	−3,4	+0,005	−0,018	−2,6	−0,002	−0,010
−3,2	−0,012	−0,004	−2,4	+0,016	+0,061	−1,6	+0,003	+0,010
−2,2	+0,024	−0,010	−1,4	−0,039	−0,074	0,6	−0,002	−0,005
−1,2	+0,249	+0,372	−0,4	+0,032	+0,053	1,6	+0,001	+0,003

La disposition en tables de ces quantités doit se comprendre comme il suit : par exemple :

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = & +0'',0948 - 0'',3145 \sin u - 0'',1163 \cos u \\ & +0'',0271 \sin 2u + 0'',0109 \cos 2u \\ & + \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\ & +0'',001 \sin(-3u+g') + 0'',006 \cos(-3u+g') \\ & + \text{etc.} \qquad + \text{etc.}\end{aligned}$$

Nous faisons cette remarque une fois pour toutes, parce que le cas doit se représenter plusieurs fois dans la suite. J'appelle ici l'attention sur la convergence qui se montre dans les valeurs numériques précédentes des quotients différentiels de Ω. D'abord on remarque une grande convergence dans chacun des groupes disposés d'après les multiples des sinus et cosinus de g'. Dans chacun d'eux, les valeurs des coefficients convergent tellement de part et d'autre des plus considérables pris pour point de départ, qu'il n'est pas nécessaire d'avoir égard à tous les termes qui existent dans la fonction $U_{i,i}$. Considérons maintenant la convergence qui se manifeste entre les termes les plus considérables des différents groupes consécutifs. Cette convergence est très-voisine de celle que j'ai nommée plus haut convergence naturelle de la fonction perturbatrice (ou plutôt, comme ici, des quotients différentiels eux-mêmes). Elle serait la convergence naturelle elle-même, si j'avais développé les quotients différentiels d'après $i'f'$ au lieu de les développer d'après $i'g'$ (voyez art. **11**).

27. Outre les équations de condition indiquées à l'art. **12**, pour contrôler le développement des quantités $D_{i,i}$, on peut en employer plusieurs autres dans le cours du calcul; elles sont si simples, qu'il suffit de les indiquer en passant. Comme une grande partie des calculs qui précèdent, consiste dans la multiplication d'un seul et même coefficient par un certain nombre d'autres coefficients, on peut, pour la vérification de ces calculs, outre ces coefficients eux-mêmes, introduire leur somme, et alors, la somme des produits obtenus doit être égale au produit du coefficient par la somme dont nous venons de parler.

§ III. — *Du choix des coordonnées convenables.*

28. Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que les quotients différentiels de la fonction perturbatrice, pris par rapport aux coordonnées x, y, z, ou, en d'autres termes, que les forces perturbatrices décomposées suivant la direction de ces coordonnées, jouissent de cette propriété, que l'on peut les

développer sans le secours de séries infinies ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite de la comète, et que l'on est conduit ainsi à des séries très-convergentes. On voit que, dans le cas qui nous occupe, cette propriété résulte de l'introduction de l'anomalie excentrique de la comète. Pour l'emploi ultérieur de ces forces troublantes au calcul des forces troublées, c'est-à-dire au calcul de la vraie valeur des coordonnées de la comète, le choix n'est pas indifférent; il doit être dirigé d'après cette condition, que leur calcul, déduit des quotients différentiels de la fonction perturbatrice dont il s'agit, n'exige pas de séries infinies ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite de la comète.

Les différentielles, d'où l'on doit déduire, par l'intégration, les perturbations des coordonnées du corps troublé, peuvent toujours, quelle que soit d'ailleurs la disposition de ces coordonnées, se mettre sous la forme suivante :

$$P\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + R\left(\frac{d\Omega}{dz}\right),$$

dans laquelle P, Q et R sont des fonctions des éléments elliptiques et des coordonnées de la comète. D'après ce qui précède, pour ne point rencontrer de séries infinies ordonnées d'après les puissances croissantes de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite de la comète, il faut, pour le cas dont il s'agit, que les coordonnées soient choisies de telle sorte que P, Q et R soient des fonctions entières et rationnelles des cosinus et sinus de l'anomalie excentrique de la comète. La recherche des expressions connues pour la différentielle des perturbations de la longitude *vraie* montre qu'on ne peut point la prendre pour une des coordonnées, car alors P, Q et R ne seraient point, à son égard, des fonctions entières et rationnelles de sin u et cos u. Mais en choisissant la longitude *moyenne*, nous pouvons satisfaire à la condition demandée.

Il faut de plus, pour satisfaire à cette condition, déterminer les perturbations du rayon vecteur, ou plutôt de son logarithme, de telle sorte que la partie purement elliptique de son expression soit calculée au moyen de l'anomalie excentrique préalablement corrigée des perturbations. Si l'on voulait déterminer les perturbations du rayon vecteur de manière à employer, dans le calcul de sa partie purement elliptique, l'anomalie *non* corrigée des perturbations (comme cela s'est pratiqué jusqu'ici dans nos tables de planètes), on ne pourrait pas satisfaire à la condition demandée, comme le montre la recherche des expressions connues des perturbations ainsi traitées.

On voit, par là, que les coordonnées par l'emploi desquelles je suis arrivé,

dans la théorie des planètes et de la Lune, à des développements plus simples et à des séries plus fortement convergentes, sont indispensables dans le problème actuel.

29. Reprenons la fonction que j'ai nommée T dans les *Fundamenta, etc.*, et égalons à zéro la quantité que j'y désigne par y; comme ici nous n'avons pas besoin de faire disparaître les termes multipliés par le temps, nous aurons

$$(A)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} = &\left\{\begin{aligned} &2\frac{\rho}{r}\cos(v_1-\lambda)-1 \\ &+2\frac{\rho}{a(1-e^2)}\left[\cos(v_1-\lambda)-1\right] \end{aligned}\right\}\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) \\ &+2\frac{\rho}{r}\sin(v_1-\lambda)\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right), \end{aligned}\right.$$

dans laquelle, outre les notations déjà employées, v_1 signifie la longitude vraie dans l'orbite, et ρ ainsi que λ sont des fonctions de la quantité indéterminée τ, qui sont liées avec elle et avec les éléments correspondants par une même relation, comme r et v_1 le sont avec t et avec ces mêmes éléments.

On a identiquement

$$\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) = \left(\frac{d\Omega}{df}\right);$$

par suite, comme

$$x = \frac{r}{a}\cos f, \qquad y = \frac{r}{a}\sin f,$$

on a

$$\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{r}{a}\sin f + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{r}{a}\cos f,$$

$$r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dx}\right)\frac{r}{a}\cos f + \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\frac{r}{a}\sin f,$$

ensuite

$$v_1 - \lambda = f - \varphi,$$

$$n\,dt = \frac{r}{a}\,du,$$

φ étant lié à τ et aux éléments correspondants comme f avec t et avec ces mêmes éléments. Substituons ces valeurs dans l'expression précédente de T, après l'avoir multipliée par dt, nous aurons :

$$
\mathrm{T}dt = \left\{ \begin{array}{r} \dfrac{r^2}{a^2}\sin f - 2\dfrac{r\rho}{a^2}\sin\varphi + 2\dfrac{r\sin f}{a^3(1-e^2)}(r\rho - r\rho\cos f\cos\varphi) \\ -2\dfrac{r^2\rho}{a^3(1-e^2)}\sin\varphi\sin^2 f \end{array} \right\} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)du
$$

$$
+ \left\{ \begin{array}{r} 2\dfrac{r\rho}{a^2}\cos\varphi - \dfrac{r^2}{a^2}\cos f + 2\dfrac{r}{a^3(1-e^2)}(r\rho\cos\varphi - \rho r\cos f) \\ -2\dfrac{r^2\rho}{a^3(1-e^2)}\cos\varphi\sin^2 f \\ +2\dfrac{r^2\rho}{a^3(1-e^2)}\sin\varphi\sin f\cos f \end{array} \right\} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)du.
$$

Iotroduisons maintenant la fonction de τ analogue à l'anomalie excentrique, et désignons-la par v; alors nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho}{a} &= 1 - e\cos v, & \frac{r}{a} &= 1 - e\cos u, \\
\frac{\rho}{a}\cos\varphi &= \cos v - e, & \frac{r}{a}\cos f &= \cos u - e, \\
\frac{\rho}{a}\sin\varphi &= \sqrt{1-e^2}.\sin v, & \frac{r}{a}\sin f &= \sqrt{1-e^2}.\sin u,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{r\rho}{a^2} - \frac{r\rho}{a^2}\cos f\cos\varphi = (1-e^2)(1-\cos v\cos u),
$$

$$
\frac{r\rho}{a^2}\cos\varphi - \frac{r\rho}{a^2}\cos f = (1-e^2)(\cos v - \cos u);
$$

de là il vient

$$
\mathrm{T}dt = \sqrt{1-e^2}\left\{ \begin{array}{l} \quad 3\sin u - \dfrac{1}{2}e\sin 2u - 3\sin v + e\sin(v-u) \\ + e\sin(v+u) + \sin(v-2u) \end{array} \right\} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right)du
$$

$$
+ \left\{ \begin{array}{l} \quad \dfrac{3}{2}e - (3-e^2)\cos u + \dfrac{1}{2}e\cos 2u + 3\cos v \\ - 3e\cos(v-u) - e\cos(v+u) + \cos(v-2u) \end{array} \right\} \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)du;
$$

d'où l'on voit que cette fonction, dont dépendeot les différentielles des perturbatioos de la longitude moyenne ainsi que les différentielles correspondantes du logarithme du rayon vecteur, jouit de la propriété demandée.

30. Avant d'aller plus loin, je dois ajouter quelque chose d'essentiel sur la

forme de ces perturbations et sur leur emploi. Dans les *Fundamenta, etc.*, j'ai montré qu'au moyen de T on obtient les perturbations de la longitude moyenne et du logarithme du rayon vecteur, de la manière suivante, en se bornant d'abord à la première puissance de la force perturbatrice.

On calcule W par la formule suivante :

$$W = -b + 2\xi\left(\frac{\rho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) - 2\eta\,\frac{\rho}{a}\sin\varphi + \int T\,dt,$$

où la quantité en dehors du signe de l'intégration est celle-là même que l'on ajoute à l'intégration, sous le nom de constante arbitraire, et dans la quantité sous le signe somme, v est constant. Nous obtenons ainsi la longitude moyenne troublée, ou l'anomalie moyenne nz, et les perturbations du logarithme hyperbolique du rayon vecteur w au moyen des expressions suivantes :

$$nz = g + n\int \overline{W}\,dt,$$

$$w = C + \frac{1}{6}b - \frac{1}{2}e\xi - \frac{1}{2}\int\left(\overline{\frac{dW}{d\tau}}\right)dt;$$

où g signifie l'anomalie moyenne non troublée, ou si l'on veut la longitude moyenne, et le trait au-dessus de la fonction W et de son quotient différentiel indique que l'on doit y changer τ en t. Dans ces expressions, b, ξ et η sont de petites quantités qui doivent être déterminées suivant les circonstances. Si, comme dans l'exemple que nous traitons ici, on prend les éléments osculateurs pour base du calcul des perturbations, ces trois quantités doivent être déterminées comme je l'ai indiqué dans un Mémoire imprimé dans les *Astr. Nachr.*, n[os] 423 et suiv. D'après les *Fundamenta, etc.*, page 149, lorsque provisoirement l'on tient compte seulement de la première puissance de la force perturbatrice, la quantité C est le terme constant dans $-\frac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt}$.

Si l'on emploie les éléments elliptiques osculateurs du corps troublé, comme base du calcul de ses perturbations, on a montré dans le Mémoire cité plus haut, que quand on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, b, ξ et η doivent être déterminées au moyen des expressions suivantes :

$$b = \left(\frac{d\delta z}{dt}\right) - 3\,\frac{(r)e\sin(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right) - \frac{2 + e^2 + 3e\cos(f)}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right) + 3(w)\right\},$$

$$\xi = -\frac{(r)\sin(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right) - \frac{\cos(f) + e}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right) + 3(w)\right\},$$

$$\eta = -\frac{(r)\cos(f)}{an\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dw}{dt}\right) + \frac{\sin(f)}{1-e^2}\left\{2\left(\frac{d\delta z}{dt}\right) + 3(w)\right\},$$

dans lesquelles (r), (f), $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$, (w) et $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ sont les valeurs numériques des quantités r, f, $\frac{d\delta z}{dt}$, w et $\frac{dw}{dt}$ qui ont lieu à l'instant ponr lequel on a pris les éléments osculateurs correspondants. Si l'on emploie, comme on l'a fait ici, non pas le moyen mouvement osculateur, mais celui que l'on obtient à l'aide d'observations aussi éloignées que possible l'une de l'autre, alors les expressions précédentes pour ξ et η subsistent encore; mais l'expression de b n'a plus la même valeur. Dans ce cas, il faut déterminer b de manière que dans l'expression de nz il ne se rencontre aucun terme proportionnel au temps, autre que le moyen mouvement que l'on prend pour base du calcul. On trouve, du reste, dans le Mémoire cité plus haut, des expressions rigoureuses pour déterminer cette quantité, c'est-à-dire en d'autres termes, des expressions qui s'étendent à toutes les puissances de la force perturbatrice; on y donne aussi une équation de condition pour cette même détermination de b.

31. Pour le calcul des perturbations de la latitude, le plus avantageux est d'employer les éléments que j'ai désignés par p et q dans les *Fundamenta, etc.*, ou bien de simples transformations de ces quantités.

Si nous changeons les quotients différentiels de la fonction perturbatrice relatifs à P et à Q au moyen des équations données dans les *Fundamenta, etc.*, en ceux relatifs à I, ν et k, alors les expressions que l'on y trouve, page 101, pour les différentielles de p et q deviennent :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\cos(N+K-\pi)\\ -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\text{cotang}\,\frac{1}{2}I-\left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\text{tang}\,\frac{1}{2}I\right]\sin(N+K-\pi)\end{array}\right\},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)\sin(N+K-\pi)\\ +\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)\text{cotang}\,\frac{1}{2}I-\left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\text{tang}\,\frac{1}{2}I\right]\cos(N+K-\pi)\end{array}\right\},$$

où π est la longitude du périhélie de la comète, correspondante à l'époque.

Maintenant, comme

$$\left(\frac{d\Omega}{dI}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{dI}\right),$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{d\nu}\right),$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dk}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\left(\frac{dH}{dk}\right),$$

nous obtenons, au moyen des équations (X) de l'art. **20** :

$$\left(\frac{d\Omega}{dI}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I \sin(f + N + K)\sin(f' + N - K),$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}I - \left(\frac{d\Omega}{dk}\right)\operatorname{tang}\frac{1}{2}I\right] = -\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I \cos(f+N+K)\sin(f'+N-K).$$

On a trouvé, dans ce même article, que

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \frac{a}{r}\left(\frac{d\Omega}{dH}\right)\sin I \sin(f' + N - K).$$

Les équations précédentes deviennent donc :

$$(\text{A})\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -n\cos i\,\dfrac{r}{a}\sin(f+\pi)\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dz}\right), \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = -n\cos i\,\dfrac{r}{a}\cos(f+\pi)\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dz}\right), \end{cases}$$

et comme les facteurs de $\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ contiennent seulement les fonctions variables $r\sin f$ et $r\cos f$, ces dernières équations satisfont également à la condition demandée.

Pour calculer ensuite la latitude ou la déclinaison de la comète relativement au plan fondamental, en désignant son sinus par s, nous avons trouvé dans les *Fundamenta, etc.* :

$$s = \sin i \sin(v_1 - \chi + \omega),$$
$$p = \sin i \sin(\chi - \omega),$$
$$q = \sin i \cos(\chi - \omega),$$
$$v_1 = f + \pi;$$

ainsi

$$s = q\sin(f+\pi) - p\cos(f+\pi).$$

Cette équation montre d'abord, si on la compare avec les expressions données plus haut pour $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, que π doit s'évanouir dans le résultat final. Nous pouvons tirer de là une simplification, en faisant d'abord disparaître cette quantité. Dans ce but, soient

$$p_1 = \sin i \sin(\chi - \omega - \pi) = p\cos\pi - q\sin\pi,$$
$$q_1 = \sin i \cos(\chi - \omega - \pi) = p\sin\pi + q\cos\pi;$$

en les différentiant, et par suite des équations (A) données plus haut, on

arrive à

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -n\cos i\,\dfrac{r}{a}\sin f\,\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dz}\right), \\ \dfrac{dq_1}{dt} = -n\cos i\,\dfrac{r}{a}\cos f\,\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\dfrac{d\Omega}{dz}\right), \end{cases}$$

et

$$s = q_1\sin f - p_1\cos f.$$

Posons maintenant

$$p_1 = (p_1) + \delta p_1,$$
$$q_1 = (q_1) + \delta q_1,$$

où (p_1) et (q_1) sont les constantes qu'il faut ajouter à l'intégration, et δp_1, dq_1 sont les perturbations de p_1 et de q_1; il en résulte, en désignant par δs les perturbations de s,

$$(C)\qquad \delta s = \delta q_1\sin f - \delta p_1\cos f.$$

Si l'on prend les éléments osculateurs du corps troublé pour base du calcul des perturbations, par suite du Mémoire cité dans l'article précédent, les constantes que nous désignons ici par (p_1) et (q_1) prennent la forme suivante (*) :

$$(p_1) = -\sin i\sin\omega - (\delta p_1),$$
$$(q_1) = -\sin i\cos\omega - (\delta q_1),$$

où (δp_1) et (δq_1) sont les valeurs numériques des perturbations δp_1 et δq_1 qui ont lieu à l'instant auquel correspondent les éléments osculateurs employés.

L'équation (C) montre que l'on ne peut pas exprimer les perturbations de la latitude par une série très-convergente; mais on peut, à la place, exprimer par des séries de cette nature les perturbations de la latitude multipliées par le rayon vecteur; car nous avons la relation

$$r\delta s = \delta q_1\,.\,r\sin f - \delta p_1\,.\,r\cos f,$$

dans laquelle les facteurs sont des fonctions entières et rationnelles de sin u et de cos u. Dans l'application, la quantité $r\delta s$ est toujours presqu'aussi simple que δs elle-même; car, d'une part, il en coûte bien peu de diviser par le rayon, lorsque

(*) Je ferai remarquer que les quantités désignées ici par p_1 et q_1 diffèrent, quant à leur point initial, de celles qui sont désignées de la même manière dans les *Fundamenta*, *etc.*, et dans le Mémoire cité; c'est pourquoi on trouve ici dans ces constantes *sin* ω et *cos* ω, tandis que là elles contenaient *sin* Φ et *cos* Φ.

déjà l'on a calculé les perturbations pour un instant quelconque d'après les expressions générales, et, d'un autre côté, on emploie souvent, pour le calcul des lieux géocentriques, des expressions qui supposent $r\delta s$; dans ces cas-là, l'équation qui précède donne sur-le-champ cette quantité.

32. On obtient ainsi l'anomalie moyenne troublée nz, les perturbations w du logarithme hyperbolique du rayon vecteur, que l'on ramène à celles du logarithme de Briggs en les multipliant par le module M des logarithmes de Briggs, et enfin les perturbations δs de la latitude ou bien de la déclinaison de la comète à l'égard du plan fondamental que l'on a choisi. De ces mêmes quantités on déduit aussi la longitude l réduite au même plan fondamental, la latitude ou la déclinaison b, et le rayon vecteur r, de la manière suivante :

On calcule d'abord $\bar{u}$, $\bar{f}$ et log Briggs $\bar{r}$ par les formules suivantes

$$\bar{u} - e \sin \bar{u} = nz,$$

$$\bar{r} \cos \bar{f} = a \cos \bar{u} - ae,$$

$$\bar{r} \sin \bar{f} = a\sqrt{1-e^2}.\sin \bar{u},$$

dans lesquelles a et e sont des éléments invariables. Ensuite on a

$$\text{log. Br. } r = \text{log. Br. } \bar{r} + \text{M}w,$$

$$\sin b = \sin i \sin(\bar{f} + \omega) + \delta s,$$

$$l = \bar{f} + \omega + \theta + \text{R} - \delta s \frac{\operatorname{tang} i \cos(\bar{f}+\omega)}{\cos^2 b},$$

où

$$\operatorname{tang} \text{R} = -\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i \sin 2(\bar{f}+\omega)}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} i \cos 2(\bar{f}+\omega)},$$

i, ω, θ étant de même les éléments invariables de la comète, désignés par ces lettres dans les articles précédents. Ces expressions sont celles des *Fundamenta, etc.*, lorsqu'on y fait égales à zéro les quantités y, α et η relatives à la théorie de la Lune, et lorsque dans les expressions relatives à la longitude réduite on néglige les termes dépendants du carré et des puissances supérieures des perturbations.

Si, dans les expressions précédentes, i, ω et θ désignent la position de l'orbite de la comète à l'égard de l'écliptique, de même que i dans les expressions de l'article précédent, alors ces expressions donnent pour l la longitude héliocentrique et pour b la latitude héliocentrique de la comète, comptées sur l'écliptique; mais si i, ω et θ désignent la position de l'orbite de la comète relativement à l'équateur, alors l signifie l'ascension droite et b la déclinaison héliocentrique de cette même comète.

Il y a encore d'autres expressions pour obtenir ces mêmes quantités, lorsque dans la réduction de la longitude ou de l'ascension droite on néglige de même les termes dépendants des carrés et des puissances supérieures. Les suivantes,

$$\cos b \cos(l - \theta) = \cos(\overline{f} + \omega),$$
$$\cos b \sin(l - \theta) = \cos i \sin(\overline{f} + \omega) - \delta s \tang i,$$
$$\sin b = \sin i \sin(\overline{f} + \omega) + \delta s,$$

donnent aussi b et l relativement à l'écliptique ou à l'équateur, selon que les éléments constants i, ω et θ se rapportent à l'un ou à l'autre plan. J'ai développé ces expressions jusqu'à la troisième puissance de la force perturbatrice inclusivement. (Voyez *Astron. Nachr.*, n°s 423 et suivants.) Si on les multiplie par r, $r\cos\theta$ et $r\sin\theta$, et si l'on pose

$$X = r \cos b \cos l,$$
$$Y = r \cos b \sin l,$$
$$Z = r \sin b,$$

on a facilement

$$X = ra \sin(\overline{f} + \omega + A) + r\delta s \sin\theta \tang i,$$
$$Y = rb_1 \sin(\overline{f} + \omega + B) - r\delta s \cos\theta \tang i,$$
$$Z = r \sin i \sin(\overline{f} + \omega) + r\delta s,$$

où l'on a fait

$$a \sin A = \cos\theta,$$
$$a \cos A = -\sin\theta \cos i,$$
$$b_1 \sin B = \sin\theta,$$
$$b_1 \cos B = \cos\theta \cos i.$$

Ce sont, abstraction faite de la forme des perturbations, les coordonnées connues de Gauss, lorsque i, ω et θ sont relatifs à l'équateur.

Pour appliquer ces expressions, on peut tenir compte de la précession et de la nutation d'une manière bien simple. Désignons par ω l'obliquité de l'écliptique, sa nutation par $\Delta\varepsilon$, la nutation de la longitude par $\Delta\psi$, la précession luni-solaire annuelle par ζ, la précession générale annuelle par ζ', et posons

$$\xi = -\Delta\psi \sin\varepsilon \cos i \sin\theta + \Delta\varepsilon \cos i \cos\theta - t\zeta \sin\varepsilon \cos i \sin\theta,$$

$$\lambda = \quad \Delta\psi \frac{\sin\varepsilon}{\sin i} \cos\theta + \Delta\varepsilon \frac{\sin\theta}{\sin i} + t\zeta \frac{\sin\varepsilon}{\sin i} \cos\theta,$$

$$\lambda' = \quad \Delta\psi \left\{ \cos\varepsilon - \frac{\cos i}{\sin i} \sin\varepsilon \cos\theta \right\} - \Delta\varepsilon \frac{\cos i}{\sin i} \sin\theta$$
$$+ t \left\{ \zeta \left[\cos\varepsilon - \frac{\cos i}{\sin i} \sin\varepsilon \cos\theta \right] + \zeta' - \zeta \right\},$$

ces quantités pouvant être facilement réduites en Tables pour chaque comète, une fois pour toutes; ensuite

$$\delta' s = \xi \sin(\overline{f} + \lambda + \omega);$$

on aura alors

$$\cos b \cos(l - \lambda' - \theta) = \cos(\overline{f} + \lambda + \omega),$$
$$\cos b \sin(l - \lambda' - \theta) = \cos i \sin(\overline{f} + \lambda + \omega) - \{\delta s + \delta' s\} \operatorname{tang} i,$$
$$\sin b = \sin i \sin(\overline{f} + \lambda + \omega) + \delta s + \delta' s \text{ (*)},$$

où l'on doit nécessairement, de même que dans les équations auxiliaires qui précèdent, rapporter i, ω et θ à l'équateur pris pour plan fixe fondamental; et par conséquent l signifie l'ascension droite héliocentrique, et b la latitude héliocentrique correspondante de la comète à l'égard du plan (variable) de l'équateur pour l'instant t (**).

Pour la comète de Encke, j'ai trouvé, relativement à l'équateur,

$$i = 35°56'17'',$$
$$\theta = 350.14.59,$$
$$\omega = 165.49.54;$$

(*) La signification géométrique des quantités ξ, λ, λ' est facile à trouver. On peut aussi y comprendre les variations séculaires contenues dans p_1 et q_1, comme je l'ai fait dans le numéro cité plus haut.

(**) Pour tout réunir ensemble, j'ajoute ici les formules au moyen desquelles on ramène relatives à l'équateur les quantités i, ω et θ, données ordinairement par rapport à l'écliptique :

$$\cos\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0 + \theta) = \sin\tfrac{1}{2}\theta_0 \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon - i_0),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0 + \theta) = \cos\tfrac{1}{2}\theta_0 \cos\tfrac{1}{2}(\varepsilon + i_0),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i \sin\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0 - \theta) = \sin\tfrac{1}{2}\theta_0 \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon - i_0),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i \cos\tfrac{1}{2}(\omega - \omega_0 - \theta) = \cos\tfrac{1}{2}\theta_0 \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + i_0);$$

i_0, θ_0 et ω_0 se rapportent à l'écliptique, et i, θ et ω à l'équateur.

et par suite, en prenant pour base les constantes de la nutation et de la précession données par Lindenau et par Bessel, on a

$$\begin{aligned}\lambda = &- 11'',219 \sin \Omega - 2'',590 \cos \Omega + 0'',135 \sin 2\Omega + 0'',006 \cos 2\Omega\\ &- 0'',893 \sin 2\odot - 0'',167 \cos 2\odot\\ &+ t\,.\,33'',6627,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda' = &- 6'',312 \sin \Omega + 2'',097 \cos \Omega + 0'',076 \sin 2\Omega - 0'',021 \cos 2\Omega\\ &- 0'',502 \sin 2\odot + 0'',136 \cos 2\odot\\ &+ t\,.\,18'',8133,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi = &- 0'',916 \sin \Omega + 7'',166 \cos \Omega + 0'',011 \sin 2\Omega - 0'',070 \cos 2\Omega\\ &- 0'',073 \sin 2\odot + 0'',463 \cos 2\odot\\ &+ t\,.\,2'',7488,\end{aligned}$$

Ω désignant la longitude du nœud de l'orbite de la Lune sur l'écliptique, et $\odot$ la longitude du Soleil. Ces formules sont le résultat de la théorie que j'ai publiée dans les *Astron. Nachr.*, n°s 244 et suivants, et n°s 295 et suivants. Je remarquerai, à ce sujet, que dans l'application de cette théorie, si l'on a égard aux carrés et aux puissances supérieures de la précession et de la nutation, la forme des équations, tant des *Fundamenta, etc.*, que du Mémoire inséré dans les *Astron. Nachr.*, n°s 423 et suivants, reste invariable. En tenant de même compte de la précession et de la nutation dans les coordonnées de Gauss, en n'ayant égard qu'à la première puissance de λ', nous aurons

$$\begin{aligned}X &= ra \sin(\overline{f}+\lambda+\omega+A) - \lambda' rb_1 \sin(\overline{f}+\lambda+\omega+B) + r\{\delta s + \delta'' s\} \sin\theta \operatorname{tang} i,\\ Y &= rb_1 \sin(\overline{f}+\lambda+\omega+B) + \lambda' ra \sin(\overline{f}+\lambda+\omega+A) - r\{\delta s + \delta'' s\} \cos\theta \operatorname{tang} i,\\ Z &= r \sin i \sin(\overline{f}+\lambda+\omega) + r\{\delta s + \delta' s\}.\end{aligned}$$

35. Après cette digression sur la forme des perturbations et sur leur emploi, je passe au développement de la quantité $T dt$. Pour cela, je pose

$$\begin{aligned} & & C_{0,0} &= \tfrac{3}{2} e,\\ S_{0,1} &= \tfrac{3}{2} \sqrt{1-e^2}, & C_{0,1} &= -\tfrac{1}{2}(3-e^2),\\ S_{0,2} &= -\tfrac{1}{4} e \sqrt{1-e^2}, & C_{0,2} &= \tfrac{1}{4} e,\\ S_{1,0} &= -\tfrac{3}{2} \sqrt{1-e^2}, & C_{1,0} &= \tfrac{3}{2},\\ S_{1,-1} &= \tfrac{1}{2} e \sqrt{1-e^2}, & C_{1,-1} &= -\tfrac{3}{2} e,\\ S_{1,1} &= \tfrac{1}{2} e \sqrt{1-e^2}, & C_{1,1} &= -\tfrac{1}{2} e,\\ S_{1,-2} &= \tfrac{1}{2} \sqrt{1-e^2}, & C_{1,-2} &= \tfrac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = \Sigma\,(i,i')_c \cos(iu+i'g') + \Sigma\,(i,i')_s \sin(iu+i'g'),$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = \Sigma\,[i,i']_s \sin(iu+i'g') + \Sigma\,[i,i']_c \cos(iu+i'g');$$

et, par suite de l'expression donnée à la fin de l'art. 29 pour Tdt,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}dt}{du} = \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i,i']_s \mathrm{C}_{0,0} + \{[i-1,i']_s + [i+1,i']_s\}\mathrm{C}_{0,1} \\ & + \{[i-2,i']_s + [i+2,i']_s\}\mathrm{C}_{0,2} \\ & + \{(i-1,i')_c - (i+1,i')_c\}\mathrm{S}_{0,1} \\ & + \{(i-2,i')_c - (i+2,i')_c\}\mathrm{S}_{0,2} \end{aligned}\right\} \sin(iu+i'g') \\
+ \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i,i']_c \mathrm{C}_{0,0} + \{[i-1,i']_c + [i+1,i']_c\}\mathrm{C}_{0,1} \\ & + \{[i-2,i']_c + [i+2,i']_c\}\mathrm{C}_{0,2} \\ & - \{(i-1,i')_s - (i+1,i')_s\}\mathrm{S}_{0,1} \\ & - \{(i-2,i')_s - (i+2,i')_s\}\mathrm{S}_{0,2} \end{aligned}\right\} \cos(iu+i'g') \\
+ \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i+1,i']_s \mathrm{C}_{1,0} + [i,i']_s \mathrm{C}_{1,-1} \\ & + [i+2,i']_s \mathrm{C}_{1,1} + [i-1,i']_s \mathrm{C}_{1,-2} \\ & - (i+1,i')_c \mathrm{S}_{1,0} - (i,i')_c \mathrm{S}_{1,-1} \\ & - (i+2,i')_c \mathrm{S}_{1,1} - (i-1,i')_c \mathrm{S}_{1,-2} \end{aligned}\right\} \sin[-v+(i+1)u+i'g'] \\
+ \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i+1,i']_c \mathrm{C}_{1,0} + [i,i']_c \mathrm{C}_{1,-1} \\ & + [i+2,i']_c \mathrm{C}_{1,1} + [i-1,i']_c \mathrm{C}_{1,-2} \\ & + (i+1,i')_s \mathrm{S}_{1,0} + (i,i')_s \mathrm{S}_{1,-1} \\ & + (i+2,i')_s \mathrm{S}_{1,1} + (i-1,i')_s \mathrm{S}_{1,-2} \end{aligned}\right\} \cos[-v+(i+1)u+i'g'] \\
+ \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i-1,i']_s \mathrm{C}_{1,0} + [i,i']_s \mathrm{C}_{1,-1} \\ & + [i-2,i']_s \mathrm{C}_{1,1} + [i+1,i']_s \mathrm{C}_{1,-2} \\ & + (i-1,i')_c \mathrm{S}_{1,0} + (i,i')_c \mathrm{S}_{1,-1} \\ & + (i-2,i')_c \mathrm{S}_{1,1} + (i+1,i')_c \mathrm{S}_{1,-2} \end{aligned}\right\} \sin[v+(i-1)u+i'g'] \\
+ \Sigma & \left\{\begin{aligned} & [i-1,i']_c \mathrm{C}_{1,0} + [i,i']_c \mathrm{C}_{1,-1} \\ & + [i-2,i']_c \mathrm{C}_{1,1} + [i+1,i']_c \mathrm{C}_{1,-2} \\ & - (i-1,i')_s \mathrm{S}_{1,0} - (i,i')_s \mathrm{S}_{1,-1} \\ & - (i-2,i')_s \mathrm{S}_{1,1} - (i+1,i')_s \mathrm{S}_{1,-2} \end{aligned}\right\} \cos[v+(i-1)u+i'g'].
\end{aligned}$$

La manière la plussimple d'exécuter ce calcul consiste à écrire à la suite les uns des autres les logarithmes des coefficients $(i,i')_c$, $[i,i']_s$, $(i,i')_s$, $[i,i']_c$,

et sur le bord inférieur d'une bande séparée de papier ceux de $S_{1,0}$, etc., $C_{0,0}$, etc. En appliquant convenablement cette bande, on ajoute tous les logarithmes correspondants, savoir, tous les S à chacun des (i, i'), et tous les C à chacun des $[i, i']$. On prend les nombres correspondants aux logarithmes des produits, et on les inscrit sur un autre papier dans les colonnes correspondantes aux deux arguments dont ils dépendent. Ces arguments s'obtiennent en même temps par l'addition et la soustraction des indices; quant aux signes algébriques, de même que pour distinguer si les produits sont les coefficients d'un sinus ou d'un cosinus, on aura recours aux formules que tout le monde connaît, et qui donnent les produits de sinus et cosinus au moyen des sinus et cosinus linéaires. Le calcul de $\frac{Tdt}{du}$ se fait ainsi très-rapidement.

Si après avoir complétement exécuté le calcul de Tdt on ajoute les trois coefficients qui correspondraient au même argument, en changeant v en u, on obtient ainsi les coefficients de la quantité

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt,$$

qui servira de contrôle à la fin du calcul. On peut encore immédiatement s'en servir d'une autre manière, en répétant les deux multiplications qui ont donné Tdt, mais en employant, pour abréger, au lieu des coefficients eux-mêmes S et C, les groupes suivants :

$$(S_{0,1} + S_{1,0} - S_{1,-2}), \qquad (S_{0,2} + S_{1,1}),$$
$$(C_{0,0} + 2C_{1,-1}), \qquad (C_{0,1} + C_{1,0} + C_{1,-2}), \qquad (C_{0,2} + C_{1,1});$$

on arrive ainsi de même à la quantité que nous venons d'indiquer.

Ces multiplications, telles que nous venons de les decrire, sont, dans la théorie des perturbations, le seul moyen d'arriver, par la voie la plus courte, à l'exactitude dont on a besoin aujourd'hui. Il serait inutile de développer complétement les expressions analytiques des perturbations; car, lorsqu'on veut, par ce moyen, obtenir l'exactitude demandée, le travail, qui du reste n'est qu'un pur exercice algébrique, devient si long et si pénible, qu'on ne peut le terminer sans omission. Que si l'on a recours à ce dernier moyen, on porte facilement trop atteinte à l'exactitude, car on a rarement la faculté de s'assurer rigoureusement de l'influence de ce qu'on néglige. Du reste, il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, à un individu de répondre de la complète exactitude d'un pareil développement algébrique.

34. Posons

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)=\Sigma\{i,i'\}_s\sin(iu+i'g')+\Sigma\{i,i'\}_c\cos(iu+i'g');$$

alors les expressions de l'art. **31** donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt}= {} & \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,\Sigma\Big\{\{i-1,i'\}_s-\{i+1,i'\}_s\Big\}\cos(iu+i'g')\\ & +\tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,\Sigma\Big\{\{i+1,i'\}_c-\{i-1,i'\}_c\Big\}\sin(iu+i'g'),\\ \frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt}= {} & \Sigma\Big\{c\{i,i'\}_s-\tfrac{1}{2}\{i+1,i'\}_s-\tfrac{1}{2}\{i-1,i'\}_s\Big\}\sin(iu+i'g')\\ & +\Sigma\Big\{c\{i,i'\}_c-\tfrac{1}{2}\{i+1,i'\}_c-\tfrac{1}{2}\{i-1,i'\}_c\Big\}\cos(iu+i'g').\end{aligned}$$

Il est superflu de remarquer ici que la lettre i à gauche sous le signe cosinus n'est pas un indice, mais qu'elle désigne l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le plan fondamental. La valeur $i'=0$ n'implique pas, dans ces formules, un cas d'exception, pourvu que l'on calcule seulement les coefficients des sinus et cosinus des multiples négatifs de u, tels que la formule les donne, et qu'ensuite on les réunisse aux multiples semblables positifs, conformément à la règle algébrique des signes.

35. En appliquant à notre exemple les règles de calcul contenues dans les deux articles qui précèdent, on a

$$\begin{aligned} & & \log C_{0,0} &= 0{,}1028,\\ \log S_{0,1} &= 9{,}9047, & \log C_{0,1} &= 0{,}0582n,\\ \log S_{0,2} &= 9{,}0533n, & \log C_{0,2} &= 9{,}3247,\\ \log S_{1,0} &= 9{,}9047n, & \log C_{1,0} &= 0{,}1761,\\ \log S_{1,-1} &= 9{,}3543, & \log C_{1,-1} &= 0{,}1028n,\\ \log S_{1,1} &= 9{,}3543, & \log C_{1,1} &= 9{,}6257n,\\ \log S_{1,-2} &= 9{,}4276, & \log C_{1,-2} &= 9{,}6990;\end{aligned}$$

ce qui donne, d'après les règles de l'art. 33,

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{du}.$$

k, i, i'.	$kv + iu + i'g'$ Sin	Cos
0, 0, 0		+0″,0315
1, −1, 0	−1″,067	−0,0630
		−0,0315
0, 1, 0	−0,772	−0,061
−1, 2, 0	−0,292	+0,036
1, 0, 0	+1,1544	+0,075
	+0,090	+0,050
0, 2, 0	+0,419	+0,035
−1, 3, 0	−0,018	−0,012
1, 1, 0	−0,482	−0,049
	−0,081	−0,026
0, 3, 0	−0,053	−0,006
−1, 4, 0	0,000	0,000
1, 2, 0	+0,077	+0,011
	+0,024	+0,005
0, 4, 0	+0,009	+0,001
−1, 5, 0	−0,001	0,000
1, 3, 0	−0,012	−0,001
	−0,004	0,000
0, −4, 1	+0,004	−0,022
−1, −3, 1	−0,006	+0,037
1, −5, 1	0,000	+0,003
	−0,002	+0,018
0, −3, 1	−0,030	+0,182
−1, −2, 1	+0,032	−0,253
1, −4, 1	+0,005	−0,033
	+0,007	−0,104

k, i, i'	$kv + iu + i'g'$ Sin	Cos
0, −2, 1	+0″,035	−0″,531
−1, −1, 1	−0,058	+0,704
1, −3, 1	+0,011	+0,115
	−0,012	+0,288
0, −1, 1	−0,019	+0,716
−1, 0, 1	+0,073	−1,029
1, −2, 1	−0,034	−0,154
	+0,020	−0,467
0, 0, 1	+0,038	−0,442
−1, 1, 1	−0,086	+0,795
1, −1, 1	+0,012	+0,088
	−0,036	+0,441
0, 1, 1	−0,042	+0,094
−1, 2, 1	+0,067	−0,332
1, 0, 1	+0,014	−0,021
	+0,039	−0,259
0, 2, 1	+0,007	+0,016
−1, 3, 1	−0,021	+0,069
1, 1, 1	−0,002	+0,005
	−0,016	+0,090
0, 3, 1	+0,004	−0,008
−1, 4, 1	+0,001	−0,004
1, 2, 1	0,000	−0,001
	+0,005	−0,013
0, −5, 2	−0,003	−0,002
−1, −4, 2	+0,008	+0,005
1, −6, 2	0,000	0,000

k, i, i'.	$kv + iu + i'g'$ Sin	Cos
	+0″,005	+0″,003
0, −4, 2	+0,046	+0,023
−1, −3, 2	−0,070	−0,030
1, −5, 2	−0,009	−0,006
	−0,033	−0,013
0, −3, 2	−0,540	−0,402
−1, −2, 2	+0,957	+0,766
1, −4, 2	+0,054	+0,015
	+0,471	+0,379
0, −2, 2	+2,872	+2,543
−1, −1, 2	−3,767	−3,338
1, −3, 2	−0,962	−0,836
	−1,857	−1,631
0, −1, 2	−4,256	−3,839
−1, 0, 2	+5,185	+4,660
1, −2, 2	+2,233	+2,014
	+3,162	+2,835
0, 0, 2	+2,851	+2,531
−1, 1, 2	−3,247	−2,877
1, −1, 2	−2,426	−2,183
	−2,822	−2,529
0, 1, 2	−1,032	−0,910
−1, 2, 2	+0,955	+0,820
1, 0, 2	+1,468	+1,329
	+1,391	+1,239
0, 2, 2	+0,227	+0,216
−1, 3, 2	−0,114	−0,092

$\frac{T\,dt}{dt}$

k, i, i'.	$kv + iu + i'g'$ Sin	$kv + iu + i'g'$ Cos
1, 1, 2	−0″,478	−0″,444
	−0,365	−0,320
0, 3, 2	−0,033	−0,030
−1, 4, 2	+0,007	+0,004
1, 2, 2	+0,071	+0,063
	+0,045	+0,037
0, 4, 2	0,000	0,000
−1, 5, 2	−0,001	0,000
1, 3, 2	−0,004	0,000
	−0,005	0,000
0, −5, 3	+0,007	−0,009
−1, −4, 3	−0,012	+0,016
1, −6, 3	−0,002	+0,002
	−0,007	+0,009
0, −4, 3	−0,125	+0,100
−1, −3, 3	+0,234	−0,167
1, −5, 3	+0,008	−0,016
	+0,117	−0,083
0, −3, 3	+0,801	−0,582
−1, −2, 3	−1,077	+0,846
1, −4, 3	−0,254	+0,159
	−0,530	+0,423
0, −2, 3	−1,470	+1,561
−1, −1, 3	+1,837	−1,997
1, −3, 3	+0,700	−0,643
	+1,067	−1,079
0, −1, 3	+1,439	−1,920
−1, 0, 3	−1,709	+2,306
1, −2, 3	−0,9[illegible]	+1,128
	−1,236	+1,514
0, 0, 3	−0,932	+1,261
−1, 1, 3	+1,023	−1,408
1, −1, 3	+0,844	−1,114
	+0,935	−1,261

k, i, i'.	$kv + iu + i'g'$ Sin	$kv + iu + i'g'$ Cos
0, 1, 3	+0″,413	−0″,506
−1, 2, 3	−0,397	+0,462
1, 0, 3	−0,500	+0,678
	−0,484	+0,634
0, 2, 3	−0,123	+0,142
−1, 3, 3	+0,090	−0,082
1, 1, 3	+0,199	−0,253
	+0,166	−0,193
0, 3, 3	+0,026	−0,025
−1, 4, 3	−0,011	+0,007
1, 2, 3	−0,054	+0,052
	−0,039	+0,034
0, 4, 3	−0,003	+0,001
−1, 5, 3	0,000	0,000
1, 3, 3	+0,007	−0,004
	+0,004	−0,003
0, −5, 4	+0,007	+0,032
−1, −4, 4	−0,013	−0,060
1, −6, 4	−0,002	−0,002
	−0,008	−0,030
0, −4, 4	−0,062	−0,223
−1, −3, 4	+0,102	+0,317
1, −5, 4	+0,012	+0,062
	+0,052	+0,156
0, −3, 4	+0,297	+0,569
−1, −2, 4	−0,403	−0,735
1, −4, 4	−0,097	−0,235
	−0,203	−0,401
0, −2, 4	−0,572	−0,762
−1, −1, 4	+0,715	+0,931
1, −3, 4	+0,270	+0,426
	+0,413	+0,595
0, −1, 4	+0,591	+0,662
−1, 0, 4	−0,703	−0,769

k, i, i'.	$kv + iu + i'g'$ Sin	$kv + iu + i'g'$ Cos
1, −2, 4	−0″,386	−0″,484
	−0,498	−0,591
0, 0, 4	−0,383	−0,424
−1, 1, 4	+0,419	+0,457
1, −1, 4	+0,346	+0,388
	+0,382	+0,421
0, 1, 4	+0,162	+0,203
−1, 2, 4	−0,153	−0,198
1, 0, 4	−0,203	−0,232
	−0,194	−0,227
0, 2, 4	−0,047	−0,072
−1, 3, 4	+0,033	+0,059
1, 1, 4	+0,078	+0,104
	+0,064	+0,091
0, 3, 4	+0,011	+0,018
−1, 4, 4	−0,004	−0,011
1, 2, 4	−0,020	−0,034
	−0,013	−0,027
0, −6, 5	+0,004	0,000
−1, −5, 5	−0,008	−0,001
1, −7, 5	0,000	0,000
	−0,004	−0,001
0, −5, 5	−0,042	−0,002
−1, −4, 5	+0,065	0,000
1, −6, 5	+0,009	+0,002
	+0,032	0,000
0, −4, 5	+0,155	−0,032
−1, −3, 5	−0,209	+0,051
1, −5, 5	−0,055	+0,004
	−0,109	+0,023
0, −3, 5	−0,286	+0,125
−1, −2, 5	+0,361	−0,163
1, −4, 5	+0,137	−0,043
	+0,212	−0,081

$\frac{T\,dt}{dt}$								
k, i, i'.	$kv+iu+i'g'$ Sin	$kv+iu+i'g'$ Cos	k, i, i'.	$kv+iu+i'g'$ Sin	$kv+iu+i'g'$ Cos	k, i, i'	$kv+iu+i'g'$ Sin	$kv+iu+i'g'$ Cos
0, −2, 5	+0″,335	−0″,203	0, 3, 5	−0″,013	+0″,002	0, −1, 6	−0″,040	−0″,099
−1, −1, 5	−0,403	+0,253	−1, 4, 5	+0,007	−0,001	−1, 0, 6	+0,048	+0,110
1, −3, 5	−0,205	+0,100	1, 2, 5	+0,021	−0,006	1, −2, 6	+0,031	+0,081
	−0,273	+0,150		+0,015	−0,005		+0,039	+0,092
0, −1, 5	−0,278	+0,197	0, −5, 6	+0,010	−0,031	0, 0, 6	+0,027	+0,064
−1, 0, 5	+0,317	−0,233	−1, −4, 6	−0,013	+0,045	−1, 1, 6	−0,029	−0,065
1, −2, 5	+0,216	−0,131	1, −6, 6	−0,004	+0,009	1, −1, 6	−0,029	−0,057
	+0,255	−0,167		−0,007	+0,023		−0,031	−0,058
0, 0, 5	+0,180	−0,126	0, −4, 6	−0,002	+0,082	0, 1, 6	−0,015	−0,031
−1, 1, 5	−0,191	+0,140	−1, −3, 6	−0,002	−0,108	−1, 2, 6	+0,014	+0,030
1, −1, 5	−0,169	+0,115	1, −5, 6	+0,005	−0,035	1, 0, 6	+0,017	+0,034
	−0,180	+0,129		+0,001	−0,061		+0,016	+0,033
0, 1, 5	−0,091	+0,058	0, −3, 6	−0,025	−0,127	0, 2, 6	+0,008	+0,011
−1, 2, 5	+0,087	−0,054	−1, −2, 6	+0,034	+0,156	−1, 3, 6	−0,005	−0,009
1, 0, 5	+0,103	−0,069	1, −4, 6	+0,007	+0,067	1, 1, 6	−0,011	−0,015
	+0,099	−0,065		+0,016	+0,096		−0,008	−0,013
0, 2, 5	+0,039	−0,016	0, −2, 6	+0,045	+0,128	0, 3, 6	−0,002	−0,002
−1, 3, 5	−0,030	+0,014	−1, −1, 6	−0,055	−0,151	−1, 4, 6	+0,001	+0,001
1, 1, 5	−0,051	+0,026	1, −3, 6	−0,024	−0,088	1, 2, 6	+0,003	+0,005
	−0,042	+0,024		−0,034	−0,111		+0,002	+0,004

Les nombres qui, dans chaque case de cette Table, se trouvent à la quatrième ligne, sont la somme des trois nombres supérieurs, et par conséquent ils sont les coefficients de la quantité $\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right)dt$.

56. Pour exécuter les calculs exposés dans l'art. 54, nous avons

$$\log \tfrac{1}{2}\sqrt{1-e^2} = 9,4275, \qquad \log e = 9,9267.$$

Avec ces valeurs, et avec celles données à l'art. 26 pour $\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$, on obtient

i, i'	$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt}$ $(iu+i'g')$ Cos	Sin	$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt}$ $(iu+i'g')$ Sin	Cos
0, 0	+0″,0842			+0″,1383
1, 0	−0,0073	−0″,048	−0″,280	−0,1985
2, 0	−0,082	+0,030	+0,184	+0,068
3, 0	+0,007	−0,003	−0,021	−0,007
−3, 1	+0,001	−0,019	+0,003	+0,040
−2, 1	−0,018	+0,011	−0,038	−0,088
−1, 1	+0,026	+0,041	+0,110	+0,036
0, 1	+0,003	−0,040	−0,148	+0,093
1, 1	−0,021	−0,014	+0,109	−0,141
2, 1	+0,015	+0,025	−0,049	+0,076
3, 1	−0,006	−0,008	+0,013	−0,018
−3, 2	−0,006	−0,003	−0,022	+0,002
−2, 2	−0,070	+0,101	−0,099	−0,192
−1, 2	+0,088	−0,108	+0,353	+0,526
0, 2	+0,038	−0,063	−0,439	−0,605
1, 2	−0,079	+0,108	+0,251	+0,329
2, 2	+0,029	−0,036	−0,066	−0,079
3, 2	−0,003	+0,003	+0,009	+0,008
−3, 3	−0,026	−0,006	−0,048	+0,009
−2, 3	+0,045	+0,035	+0,166	−0,081
−1, 3	−0,009	−0,030	−0,256	+0,188

i, i'	$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_1}{dt}$ $(iu+i'g')$ Cos	Sin	$\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_1}{dt}$ $(iu+i'g')$ Sin	Cos
0, 3	−0″,029	−0″,020	+0″,227	−0″,204
1, 3	+0,032	+0,034	−0,121	+0,115
2, 3	−0,016	−0,014	+0,040	−0,032
−3, 4	−0,004	+0,016	−0,012	−0,046
−2, 4	+0,011	−0,015	+0,050	+0,087
−1, 4	−0,005	−0,002	−0,057	−0,119
0, 4	−0,007	+0,013	+0,053	+0,095
1, 4	+0,008	−0,012	−0,027	−0,050
2, 4	−0,003	+0,007	+0,008	+0,018
−4, 5	−0,004	0,000	−0,011	0,000
−3, 5	+0,006	+0,002	+0,029	−0,004
−2, 5	−0,004	−0,003	−0,045	+0,015
−1, 5	−0,002	+0,001	+0,047	−0,021
0, 5	+0,005	+0,004	−0,034	+0,019
1, 5	−0,004	−0,003	+0,020	−0,011
2, 5	+0,003	+0,001	−0,008	+0,004
−3, 6	+0,001	−0,003	0,000	+0,012
−2, 6	−0,001	+0,001	−0,003	−0,017
−1, 6	0,000	+0,002	+0,005	+0,016
0, 6	+0,001	−0,002	−0,005	−0,011
1, 6	−0,001	+0,001	+0,002	+0,006

On termine ainsi le développement des différentielles.

§ IV. — *Intégration des différentielles du paragraphe précédent.*

57. Les fonctions à intégrer ont toutes, ou la forme

$$a\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(iu+i'g'+\mathrm{A})\,du,$$

ou bien

$$na\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(iu+i'g'+\mathrm{A})\,dt,$$

où a et A sont indépendants de u et de t. Je montrerai d'abord comment on peut ramener l'intégrale de la seconde forme à celle de la première, puis je donnerai l'intégrale générale de celle-là, et j'appliquerai ensuite cette expression générale au développement du paragraphe précédent.

38. Comme on a

$$ndt = (1 - e\cos u)\,du,$$

on obtient aussitôt

$$na\int \sin(iu + i'g' + A)\,dt = a\int \sin(iu + i'g' + A)\,du$$
$$-\tfrac{1}{2}ea\int \sin[(i+1)u + i'g' + A]du - \tfrac{1}{2}ea\int \sin[(i-1)u + i'g' + A]\,du,$$
$$na\int \cos(iu + i'g' + A)\,dt = a\int \cos(iu + i'g' + A)\,du$$
$$-\tfrac{1}{2}ea\int \cos[(i+1)u + i'g' + A]du - \tfrac{1}{2}ea\int \cos[(i-1)u + i'g' + A]\,du.$$

Il y a encore une autre manière qui, dans l'application, conduit à un calcul plus simple; on l'obtient par l'intégration par partie de l'expression donnée: on a

$$g' = n't + c',$$

c' étant une constante; on arrive ainsi, de la manière que nous venons d'indiquer, à

$$na\int \sin(iu + i'g' + A)\,dt = -\frac{a}{i'\nu}\cos(iu + i'g' + A)$$
$$-\frac{ia}{i'\nu}\int \sin(iu + i'g' + A)\,du,$$
$$na\int \cos(iu + i'g' + A)\,dt = \frac{a}{i'\nu}\sin(iu + i'g' + A)$$
$$-\frac{ia}{i'\nu}\int \cos(iu + i'g' + A)\,du,$$

où l'on a fait

$$\nu = \frac{n'}{n}.$$

On est, comme on voit, de cette seconde manière, dispensé de multiplier par $(1 - e\cos u)$. Mais cette méthode n'est pas applicable lorsque $i' = 0$, auquel cas il faut par conséquent employer la première. Celle-ci donne alors

$$na\int \sin(iu + A)\,dt = -\frac{a}{i}\cos(iu + A) + \frac{\frac{1}{2}ea}{i+1}\cos[(i+1)u + A]$$
$$+\frac{\frac{1}{2}ea}{i-1}\cos[(i-1)u + A],$$
$$na\int \cos(iu + A)\,dt = \frac{a}{i}\sin(iu + A) - \frac{\frac{1}{2}ea}{i+1}\sin[(i+1)u + A]$$
$$-\frac{\frac{1}{2}ea}{i-1}\sin[(i-1)u + A],$$

où l'on trouve encore les cas d'exception, lorsque $i = 0$, $i = 1$ ou bien $i = -1$. Mais alors on a :

(1) Lorsque $i = 0$,

$$na\int \sin \mathrm{A}\,dt = ant \sin \mathrm{A},$$
$$na\int \cos \mathrm{A}\,dt = ant \cos \mathrm{A};$$

(2) Lorsque $i = 1$,

$$na\int \sin(u + \mathrm{A})\,dt = -a\cos(u + \mathrm{A}) + \tfrac{1}{4}ea\cos(2u + \mathrm{A}) - \tfrac{1}{2}eau\sin\mathrm{A},$$
$$na\int \cos(u + \mathrm{A})\,dt = a\sin(u + \mathrm{A}) - \tfrac{1}{4}ea\sin(2u + \mathrm{A}) - \tfrac{1}{2}eau\cos\mathrm{A},$$

ou bien, en éliminant u au moyen de l'équation $u = nt + e\sin u$,

$$\begin{aligned} na\int \sin(u + \mathrm{A})\,dt &= -\tfrac{1}{2}eant\sin\mathrm{A} - \tfrac{1}{4}e^2a\cos(-u + \mathrm{A}) \\ &\quad - a(1 - \tfrac{1}{4}e^2)\cos(u + \mathrm{A}) + \tfrac{1}{4}ea\cos(2u + \mathrm{A}), \\ na\int \cos(u + \mathrm{A})\,dt &= -\tfrac{1}{2}eant\cos\mathrm{A} + \tfrac{1}{4}e^2a\sin(-u + \mathrm{A}) \\ &\quad + a(1 - \tfrac{1}{4}e^2)\sin(u + \mathrm{A}) - \tfrac{1}{4}ea\sin(2u + \mathrm{A}); \end{aligned}$$

ces expressions, lorsque $\mathrm{A} = 0$, deviennent

$$\begin{aligned} na\int \sin u\,.\,dt &= -a\cos u + \tfrac{1}{4}ea\cos 2u, \\ na\int \cos u\,.\,dt &= -\tfrac{1}{2}eau + a\sin u - \tfrac{1}{4}ea\sin 2u \\ &= -\tfrac{1}{2}eant + a(1 - \tfrac{1}{2}e^2)\sin u - \tfrac{1}{4}ea\sin 2u. \end{aligned}$$

L'intégrale relative au troisième cas, $i = -1$, revient à celle du second cas lorsqu'on y écrit $-\mathrm{A}$ au lieu de A.

39. Avant de procéder à la détermination de l'intégrale de la première forme exposée à l'art. **37**, je remarque que le cas où $i' = 0$ ne fait naître aucune difficulté ; en effet, nous avons alors, d'après les règles connues,

$$a\int \sin(iu + \mathrm{A})\,du = -\frac{a}{i}\cos(iu + \mathrm{A}),$$

$$a\int \cos(iu + \mathrm{A})\,du = \frac{a}{i}\sin(iu + \mathrm{A}),$$

avec cette exception que pour $i = 0$, on aura

$$\begin{aligned} a\int \sin \mathrm{A}\,du &= au\sin\mathrm{A} \\ &= ant\sin\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}ea\cos(-u + \mathrm{A}) - \tfrac{1}{2}ea\cos(u + \mathrm{A}), \\ a\int \cos \mathrm{A}\,du &= au\cos\mathrm{A} \\ &= ant\cos\mathrm{A} + \tfrac{1}{2}ea\sin(-u + \mathrm{A}) + \tfrac{1}{2}ea\sin(u + \mathrm{A}). \end{aligned}$$

40. Il nous reste maintenant à déterminer l'intégrale de la forme complète

$$a \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} (iu + i'g' + \mathrm{A})\, du\,;$$

jusqu'ici elle n'a été donnée nulle part, parce que cette forme ne s'est pas encore rencontrée. On reconnaît facilement que cette intégrale ne peut pas avoir une autre forme que la suivante :

$$(\mathrm{X}) \left\{ \begin{aligned} & a\int \cos(iu+i'g'+\mathrm{A})du = a\alpha_i^i \sin(iu+i'g'+\mathrm{A}) \\ & + a\alpha_{i+1}^i \sin[(i+1)u+i'g'+\mathrm{A}] + a\alpha_{i+2}^i \sin[(i+2)u+i'g'+\mathrm{A}] + \text{etc.} \\ & + a\alpha_{i-1}^i \sin[(i-1)u+i'g'+\mathrm{A}] + a\alpha_{i-2}^i \sin[(i-2)u+i'g'+\mathrm{A}] + \text{etc.}, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle les quantités désignées par α sont des facteurs constants. Différentiant cette expression, et ayant égard aux équations

$$g' = n't + c', \quad \nu = \frac{n'}{n}, \quad dt = \frac{1}{n}(1 - e\cos u)du,$$

on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \cos(iu+i'g'+\mathrm{A}) = & \left\{\alpha_i^i(i+i'\nu) - \lambda\alpha_{i+1}^i - \lambda\alpha_{i-1}^i\right\} \cos(iu+i'g'+\mathrm{A}) \\ & - \left\{\lambda\alpha_i^i \quad - (i+1+i'\nu)\alpha_{i+1}^i + \lambda\alpha_{i+2}^i\right\} \cos[(i+1)u+i'g'+\mathrm{A}] \\ & - \left\{\lambda\alpha_{i+1}^i - (i+2+i'\nu)\alpha_{i+2}^i + \lambda\alpha_{i+3}^i\right\} \cos[(i+2)u+i'g'+\mathrm{A}] \\ & - \text{etc.} \\ & - \left\{\lambda\alpha_i^i \quad - (i-1+i'\nu)\alpha_{i-1}^i + \lambda\alpha_{i-2}^i\right\} \cos[(i-1)u+i'g'+\mathrm{A}] \\ & - \left\{\lambda\alpha_{i-1}^i - (i-2+i'\nu)\alpha_{i-2}^i + \lambda\alpha_{i-3}^i\right\} \cos[(i-2)u+i'g'+\mathrm{A}] \\ & - \text{etc.}, \end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abreger,

$$\lambda = \frac{1}{2}ei'\nu.$$

Comme l'équation précédente doit être identique, on en conclut

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{aligned} & 1 = (i+i'\nu)\alpha_i^i - \lambda\alpha_{i+1}^i - \lambda\alpha_{i-1}^i, \\ & 0 = \lambda\alpha_i^i \quad - (i+1+i'\nu)\alpha_{i+1}^i + \lambda\alpha_{i+2}^i, \qquad 0 = \lambda\alpha_i^i \quad - (i-1+i'\nu)\alpha_{i-1}^i + \lambda\alpha_{i-2}^i, \\ & 0 = \lambda\alpha_{i+1}^i - (i+2+i'\nu)\alpha_{i+2}^i + \lambda\alpha_{i+3}^i, \qquad 0 = \lambda\alpha_{i-1}^i - (i-2+i'\nu)\alpha_{i-2}^i + \lambda\alpha_{i-3}^i, \\ & 0 = \lambda\alpha_{i+2}^i - (i+3+i'\nu)\alpha_{i+3}^i + \lambda\alpha_{i+4}^i, \qquad 0 = \lambda\alpha_{i-2}^i - (i-3+i'\nu)\alpha_{i-3}^i + \lambda\alpha_{i-4}^i, \\ & \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

41. Les équations que nous venons de trouver, peuvent s'exprimer en fractions continues très-convergentes, et être ainsi résolues d'une manière commode. Les équations à gauche, à partir de la seconde, donnent en effet, au moyen d'une légère transformation,

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha^i_{i+1}}{\alpha^i_i} = \dfrac{1}{\dfrac{i+1+i'\nu}{\lambda} - \dfrac{\alpha^i_{i+2}}{\alpha^i_{i+1}}}, \\[2ex] \dfrac{\alpha^i_{i+2}}{\alpha^i_{i+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{i+2+i'\nu}{\lambda} - \dfrac{\alpha^i_{i+3}}{\alpha^i_{i+2}}}, \\[2ex] \dfrac{\alpha^i_{i+3}}{\alpha^i_{i+2}} = \dfrac{1}{\dfrac{i+3+i'\nu}{\lambda} - \dfrac{\alpha^i_{i+4}}{\alpha^i_{i+3}}}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha^i_{i+1}}{\alpha^i_i} = \cfrac{1}{\cfrac{i+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+2+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+3+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+4+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}}}$$

De même, dans les équations (A) de l'article précédent, le système de celles qui sont à droite donne

$$\frac{\alpha^i_{i-1}}{\alpha^i_i} = \cfrac{1}{\cfrac{i-1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-2+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-3+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-4+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}}}$$

On voit facilement que ces fractions continues convergent toujours. Si l'on

développe la première d'entre elles jusqu'au terme qui contient $i+k+i'\nu$, ses deux derniers termes sont les suivants :

$$\cfrac{1}{\cfrac{i+k-1+i'\nu}{\lambda}-\cfrac{1}{\cfrac{i+k+i'\nu}{\lambda}-\cfrac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}}}.$$

On peut toujours choisir k de telle manière que le dernier de ces termes soit insensible, d'où il suit que la somme de tous les termes suivants doit aussi être insensible : car les quantités

$$i+i'\nu,\quad i+1+i'\nu,\ldots,\text{ etc.},\quad i+k+i'\nu,\text{ etc.},$$

lorsqu'on développe suffisamment, deviennent nécessairement positives, et commencent, à partir de là, à croître jusqu'à l'infini. On peut donc toujours prendre k tel, que $\frac{i+k+i'\nu}{\lambda}$ soit un nombre très-grand et que par conséquent $\cfrac{1}{\cfrac{i+k+i'\nu}{\lambda}}$ soit insensible. Si, en même temps, $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$ est une petite fraction, alors $\cfrac{1}{\cfrac{i+k+i'\nu}{\lambda}-\cfrac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}}$ sera pareillement insensible, et dans l'application, la fraction continue s'arrêtera à ce terme. Il est facile de faire voir que cette supposition, relativement à la relation $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$, satisfait aux équations primitives. Reprenons, dans l'article précédent, les équations d'où nous avons déduit nos fractions continues, à partir de la k^{me}, et mettons-les sous la forme suivante :

$$\frac{i+k+i'\nu}{\lambda}=\beta_k+\frac{1}{\beta_{k-1}},$$
$$\frac{i+k+1+i'\nu}{\lambda}=\beta_{k+1}+\frac{1}{\beta_k},$$
$$\frac{i+k+2+i'\nu}{\lambda}=\beta_{k+2}+\frac{1}{\beta_{k+1}},$$
etc.

où l'on a écrit en général β_k pour $\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}}$; on reconnaît sur-le-champ que lorsque $\frac{i+k+i'\nu}{\lambda}$ est un grand nombre, on satisfait à ces équations en supposant que β_{k-1}, β_k, β_{k+1}, etc. sont de petites fractions. Nous pouvons donc, dans la pratique, pour calculer la première fraction continue ci-dessus, en supposant k suffisamment grand, faire $\beta_k = 0$.

Le même cas se présente dans l'autre fraction continue, car les quantités

$$i-1+i'\nu, \quad i-2+i'\nu, \ldots\ldots, \text{ etc.}, \quad i-k+i'\nu, \text{ etc.},$$

à partir de la plus petite d'entre elles, croîtront toujours avec le signe négatif jusqu'à l'infini.

42. Dans la première fraction continue citée dans l'article précédent, écrivons $i+k$ à la place de i, alors elle se change en la suivante :

$$\frac{\alpha^{i+k}_{i+k+1}}{\alpha^{i+k}_{i+k}} = \cfrac{1}{\cfrac{i+k+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+k+2+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}$$

Convertissons en fractions continues les équations (B) de l'article précédent; en négligeant les k premières, nous aurons

$$\frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}} = \cfrac{1}{\cfrac{i+k+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+k+2+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\alpha^{i+k}_{i+k+1}}{\alpha^{i+k}_{i+k}} = \frac{\alpha^{i}_{i+k+1}}{\alpha^{i}_{i+k}};$$

de la même manière, on voit que

$$\frac{\alpha^{i-k}_{i-k-1}}{\alpha^{i-k}_{i-k}} = \frac{\alpha^{i}_{i-k-1}}{\alpha^{i}_{i-k}}.$$

Ces équations montrent que le rapport, entre deux facteurs d'intégration consécutifs, est indépendant des indices supérieurs. Mais les fractions continues dont proviennent ces équations, font voir, en même temps, que la valeur de ce rapport change selon que l'indice inférieur croît ou diminue. Soit maintenant

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned} p_i &= \cfrac{1}{\cfrac{i+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+2+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+3+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}}} \\ q_i &= \cfrac{1}{\cfrac{i+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-1+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-2+i'\nu}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i-3+i'\nu}{\lambda} - \text{etc.}}}}} \end{aligned}\right.$$

Lorsque p_i et q_i ont été calculés pour toutes les valeurs de l'indice i, on arrive à

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{aligned} \alpha^i_{i+k} &= \alpha^i_i \cdot p_{i+1} \cdot p_{i+2} \ldots p_{i+k}, \\ \alpha^i_{i-k} &= \alpha^i_i \cdot q_{i-1} \cdot q_{i-2} \ldots q_{i-k}, \end{aligned}\right.$$

et lorsqu'on connaît ainsi p_i, q_i, et α^i_i, alors on obtient tous les autres facteurs d'intégration à l'aide des équations précédentes. Les facteurs d'intégration qui ont le même indice supérieur et inférieur s'obtiennent, après avoir calcule p_i et q_i au moyen des équations (A) qui précèdent, par l'équation suivante :

$$(\mathrm{C})\qquad \alpha^i_i = \frac{1}{i + i'\nu - \lambda[p_{i+1} + q_{i-1}]},$$

qui n'est autre chose qu'une transformation de la première équation (A) de l'art. 40.

Par ce qui précède on arrive en même temps à l'intégration de la quantité

$$a \sin(iu + i'g' + A)\,du,$$

car lorsque dans l'intégrale (X), qui se trouve à droite dans l'art. 40, on change le sinus en cosinus, si l'on change) en même temps les signes algébriques, on retombe alors sur les mêmes facteurs d'intégration que l'on vient de développer dans ce qui précède.

43. La méthode que l'on vient de développer, relativement au calcul des facteurs d'intégration, est surtout avantageuse dans la pratique quand λ est petit, car alors les fractions continues (A) convergent très-rapidement dès les premiers termes. Mais lorsque λ est un nombre un peu grand, l'emploi de ces fractions continues devient très-pénible, parce qu'alors la convergence ne commence à avoir lieu que pour une valeur assez considérable de $i + k$; et par conséquent, pour arriver à une valeur suffisamment exacte de p_i et de q_i, il faut calculer un très-grand nombre de termes. Mais il y a une autre méthode qui se prête avantageusement au calcul de ces facteurs d'intégration, précisément dans le cas où λ est un grand nombre; je vais maintenant la mettre en regard de la première.

Soient y et x deux quantités qui dépendent l'une de l'autre de la manière suivante :

$$y = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{i+n} x^n.$$

Si l'on multiplie cette équation successivement par a, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x^2}$, etc., et si l'on ajoute les produits, on obtient

$$y\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \text{etc.}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [a\alpha_{i+n} + b\alpha_{i+n+1} + c\alpha_{i+n+2} + \text{etc.}]\,x^n.$$

La différentielle de l'équation proposée est

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} n\alpha_{i+n} x^{n-1}.$$

En la traitant de la même manière, on arrive à

$$\frac{dy}{dx}\left(a'x + b' + \frac{c'}{x} + \text{etc.}\right)$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} [a' n\alpha_{i+n} + b'(n+1)\alpha_{i+n+1} + c'(n+2)\alpha_{i+n+2} + \text{etc.}]\,x^n.$$

On obtiendrait des équations semblables pour des différentielles plus élevées, de même que pour d'autres combinaisons de différents genres, mais je m'en tiens à celles-ci, parce qu'elles suffisent pour le but que je me propose.

44. Revenons aux équations (A) de l'art. 40, et représentons-les par une

équation générale, nous aurons

$$(i + n + 1 + i'\nu)\, \alpha^i_{i+n+1} - \lambda\alpha^i_{i+n} - \lambda\alpha^i_{i+n+2} = 0,$$

et par exception $= 1$ lorsque $n = -1$.

Comparons cette équation avec les deux équations auxquelles on est arrivé dans l'article précédent; si l'on y donne aux coefficients désignés par α_{i+n}, etc. la même signification que nous avons attribuée respectivement à α^i_{i+n}, etc., alors on a

$$\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{i+i'\nu}{x} - \lambda - \frac{\lambda}{x^2}\right) = \frac{1}{x}.$$

Par la manière dont on a déduit cette équation différentielle linéaire du premier ordre, on voit que si on l'intègre, et si on développe l'intégrale en une série infinie ordonnée d'après les puissances entières de x, pour chaque valeur de l'exposant n, le coefficient de x^n sera égal au facteur d'intégration α^i_{i+n}, et par conséquent ce dernier s'obtiendra par l'intégration de cette équation.

48. On peut exprimer de différentes manières les facteurs d'intégration, au moyen de cette même équation différentielle linéaire développée. Posons

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos z,$$

on en tirera, entre autres conséquences,

$$x - \frac{1}{x} = 2\rho \sin z, \qquad dx = \rho x dz,$$

où l'on a écrit ρ pour $\sqrt{-1}$. En substituant ces expressions, l'équation différentielle trouvée dans l'article précédent devient

$$\frac{dy}{dz} + y\rho\,(\omega - 2\lambda \cos z) = \rho,$$

où, pour abréger, on a mis ω pour $i + i'\nu$. L'intégrale de cette équation est

$$y = c^{-\rho(\omega z - 2\lambda \sin z)} \int c^{\rho(\omega z - 2\lambda \sin z)} \rho dz + \text{const.},$$

c étant la base des logarithmes hyperboliques. L'intégration par partie donne

en général

$$\int c^{\rho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]}\rho dz = \frac{1}{\omega+k}c^{\rho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]} + \frac{\lambda}{\omega+k}\int c^{\rho[(\omega+k+1)z-2\lambda\sin z]}\rho dz + \frac{\lambda}{\omega+k}\int c^{\rho[(\omega+k-1)z-2\lambda\sin z]}\rho dz.$$

Posons maintenant, pour abréger,

$$\int c^{\rho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]}\rho dz = \varphi(\omega+k),$$
$$c^{\rho[(\omega+k)z-2\lambda\sin z]} = \mathrm{F}(\omega+k);$$

on arrive ainsi, par suite de l'équation précédente, en mettant successivement pour k tous les nombres entiers, aux équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l}
\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega}\mathrm{F}(\omega) + \frac{\lambda}{\omega}\varphi(\omega+1) + \frac{\lambda}{\omega}\varphi(\omega-1),\\
\varphi(\omega+1) = \frac{1}{\omega+1}\mathrm{F}(\omega+1) + \frac{\lambda}{\omega+1}\varphi(\omega+2) + \frac{\lambda}{\omega+1}\varphi(\omega),\\
\varphi(\omega+2) = \frac{1}{\omega+2}\mathrm{F}(\omega+2) + \frac{\lambda}{\omega+2}\varphi(\omega+3) + \frac{\lambda}{\omega+2}\varphi(\omega+1),\\
\qquad\text{etc.,}\qquad\qquad\qquad\text{etc.,}\\
\varphi(\omega-1) = \frac{1}{\omega-1}\mathrm{F}(\omega-1) + \frac{\lambda}{\omega-1}\varphi(\omega) + \frac{\lambda}{\omega-1}\varphi(\omega-2),\\
\varphi(\omega-2) = \frac{1}{\omega-2}\mathrm{F}(\omega-2) + \frac{\lambda}{\omega-2}\varphi(\omega-1) + \frac{\lambda}{\omega-2}\varphi(\omega-3),\\
\qquad\text{etc.,}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Ces équations donnent, par des substitutions successives,

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega}\mathrm{F}(\omega) + \frac{\lambda}{\omega.\omega+1}\mathrm{F}(\omega+1) + \frac{\lambda}{\omega-1.\omega}\mathrm{F}(\omega-1) + \frac{\lambda^2}{\omega.\omega+1}\varphi(\omega+2) + \frac{2\lambda^2}{\omega-1.\omega+1}\varphi(\omega) + \frac{\lambda^2}{\omega-1.\omega}\varphi(\omega-2),$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega}F(\omega) + \frac{\lambda}{\omega.\omega+1}F(\omega+1) + \frac{\lambda}{\omega-1.\omega}F(\omega-1)$$
$$+ \frac{\lambda^2}{\omega.\omega+1.\omega+2}F(\omega+2) + \frac{2\lambda^2}{\omega-1.\omega.\omega+1}F(\omega) + \frac{\lambda^2}{\omega-2.\omega-1.\omega}F(\omega-2)$$
$$+ \frac{\lambda^3}{\omega.\omega+1.\omega+2}\varphi(\omega+3) + \frac{3\lambda^3}{\omega-1.\omega.\omega+2}\varphi(\omega+1)$$
$$+ \frac{3\lambda^3}{\omega-2.\omega.\omega+1}\varphi(\omega-1) + \frac{\lambda^3}{\omega-2.\omega-1.\omega}\varphi(\omega-3),$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega}F(\omega) + \frac{\lambda}{\omega.\omega+1}F(\omega+1) + \frac{\lambda}{\omega-1.\omega}F(\omega-1)$$
$$+ \frac{\lambda^2}{\omega.\omega+1.\omega+2}F(\omega+2) + \frac{2\lambda^2}{\omega-1.\omega.\omega+1}F(\omega) + \frac{\lambda^2}{\omega-2.\omega-1.\omega}F(\omega-2)$$
$$+ \frac{\lambda^3}{\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3}F(\omega+3) + \frac{3\lambda^3}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2}F(\omega+1)$$
$$+ \frac{3\lambda^3}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1}F(\omega-1) + \frac{\lambda^3}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega}F(\omega-3)$$
$$+ \frac{\lambda^4}{\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3}\varphi(\omega+4) + \frac{4\lambda^4}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+3}\varphi(\omega+2)$$
$$+ \frac{6\lambda^4}{\omega-2.\omega-1.\omega+1.\omega+2}\varphi(\omega)$$
$$+ \frac{4\lambda^4}{\omega-3.\omega-1.\omega.\omega+1}\varphi(\omega-2) + \frac{\lambda^4}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega}\varphi(\omega-4);$$

ainsi de suite, la loi de la série est évidente. Si nous comparons la signification des notations $\varphi(\omega)$ et $F(\omega)$ avec la valeur de y donnée plus haut, il en résulte que le coefficient de $F(\omega+k)$, dans l'expression de $\varphi(\omega)$, est égal au facteur d'intégration α'_{i+n}. L'expression trouvée plus haut pour $\varphi(\omega)$, si l'on y remplace les coefficients binômes qui s'y trouvent par leur expression générale, donne

$$\alpha'_i = \frac{1}{\omega} + \frac{\frac{2}{1}\lambda^2}{\omega-1.\omega.\omega+1} + \frac{\frac{4.3}{1.2}\lambda^4}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2}$$
$$+ \frac{\frac{6.5.4}{1.2.3}\lambda^6}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3} + \text{etc.},$$

$$\alpha'_{i+1} = \frac{\lambda}{\omega.\omega+1} + \frac{\frac{3}{1}\lambda^3}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \frac{\frac{5.4}{1.2}\lambda^5}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3} + \text{etc.},$$

$$x'_{i+2} = \frac{\lambda^2}{\omega.\omega+1.\omega+2} + \frac{\frac{4}{1}\lambda^4}{\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3}$$

$$+ \frac{\frac{6.5}{1.2}\lambda^6}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2.\omega+3.\omega+4} + \text{etc.},$$

etc., etc.,

$$x'_{i-1} = \frac{\lambda}{\omega-1.\omega} + \frac{\frac{3}{1}\lambda^3}{\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1} + \frac{\frac{5.4}{1.2}\lambda^5}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \text{etc.},$$

$$x'_{i-2} = \frac{\lambda^2}{\omega-2.\omega-1.\omega} + \frac{\frac{4}{1}\lambda^4}{\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1}$$

$$+ \frac{\frac{6.5}{1.2}\lambda^6}{\omega-4.\omega-3.\omega-2.\omega-1.\omega.\omega+1.\omega+2} + \text{etc.},$$

etc., etc.

Ces séries suivent, comme on voit, une loi très-simple, et convergent pour chaque valeur de λ; mais, lorsque λ est très-grand, il faut calculer un très-grand nombre de termes. Elles ne sont donc pas propres à l'application pour ce cas-là; mais elles font connaître immédiatement une propriété importante du facteur d'intégration, et cette circonstance, jointe à la forme régulière qu'elles présentent, m'a engagé à en donner ici le développement. D'après les expressions qui précèdent, on reconnaît immédiatement que, lorsque les mouvements moyens de la comète et de la planète sont commensurables, c'est-à-dire lorsque, pour certaines valeurs de i et de i', on a

$$i + i'\nu = \omega = 0,$$

alors ces valeurs de i et de i' donnent les facteurs d'intégration correspondants infiniment grands. On voit par là que, dans ce cas, l'intégration doit être dirigée d'une autre manière; le changement qu'il faut alors introduire dans la méthode d'intégration peut facilement se conclure des équations dont nous sommes partis; mais j'en renverrai l'exposition à une autre occasion.

Les expressions précédentes du facteur d'intégration font aussi reconnaître que, *lorsque les moyens mouvements de la comète et de la planète* NE *sont* PAS *commensurables*, AUCUN *facteur d'intégration ne devient infiniment grand.*

C'est là un point important pour le problème qui nous occupe, car la possibilité de la solution que nous donnons ici en dépend.

46. Si nous intégrons l'équation différentielle de l'art. 44 sans introduire une autre quantité pour x, nous aurons

$$\text{(A)} \qquad y = x^{-\omega} c^{\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} \int x^{\omega-1} c^{-\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} dx + \text{const.},$$

où, comme plus haut, on a mis ω pour $i + i'\nu$. Les deux séries

$$c^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 + \frac{1}{2.3}\lambda^3 x^3 + \frac{1}{2.3.4}\lambda^4 x^4 + \text{etc.},$$

$$c^{-\frac{\lambda}{x}} = 1 - \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{x^2} - \frac{1}{2.3}\frac{\lambda^3}{x^3} + \frac{1}{2.3.4}\frac{\lambda^4}{x^4} \mp \text{etc.}$$

donnent sans peine

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} c^{\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = I^0_\lambda + I^1_\lambda x + I^2_\lambda x^2 + I^3_\lambda x^3 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad - I^1_\lambda \frac{1}{x} + I^2_\lambda \frac{1}{x^2} - I^3_\lambda \frac{1}{x^3} \pm \text{etc.}, \\ c^{-\lambda\left(x-\frac{1}{x}\right)} = I^0_\lambda - I^1_\lambda x + I^2_\lambda x^2 - I^3_\lambda x^3 + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + I^1_\lambda \frac{1}{x} + I^2_\lambda \frac{1}{x^2} + I^3_\lambda \frac{1}{x^3} + \text{etc.}, \end{cases}$$

où (*)

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} I^0_\lambda = 1 - \lambda^2 + \frac{1}{2^2}\lambda^4 - \frac{1}{2^2.3^2}\lambda^6 \pm \text{etc.}, \\ I^1_\lambda = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^3 + \frac{1}{2^2.3}\lambda^5 - \frac{1}{2^2.3^2.4}\lambda^7 \pm \text{etc.}, \\ I^2_\lambda = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2.3}\lambda^4 + \frac{1}{2^2.3.4}\lambda^6 - \frac{1}{2^2.3^2.4.5}\lambda^8 \pm \text{etc.}, \\ I^3_\lambda = \frac{1}{2.3}\lambda^3 - \frac{1}{2.3.4}\lambda^5 + \frac{1}{2^2.3.4.5}\lambda^7 - \frac{1}{2^2.3^2.4.5.6}\lambda^9 \pm \text{etc.}, \\ \qquad \text{etc.}, \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

(*) Il faut remarquer que les nombres écrits en haut et à droite de la lettre I ne sont pas des exposants, mais des indices.

Substituons maintenant les séries (B) dans (A), et exécutons les intégrations; nous aurons

$$y=\left\{\begin{array}{l}\text{etc.}+I_{\lambda}^{4}x^{-4}-I_{\lambda}^{3}x^{-3}+I_{\lambda}^{2}x^{-2}-I_{\lambda}^{1}x^{-1}+I_{\lambda}^{0}+I_{\lambda}^{1}x\\ \quad+I_{\lambda}^{2}x^{2}+I_{\lambda}^{3}x^{3}+I_{\lambda}^{4}x^{4}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\text{etc.}+\frac{I_{\lambda}^{4}}{\omega+4}x^{4}-\frac{I_{\lambda}^{3}}{\omega+3}x^{3}+\frac{I_{\lambda}^{2}}{\omega+2}x^{2}-\frac{I_{\lambda}^{1}}{\omega+1}x+\frac{I_{\lambda}^{0}}{\omega}+\frac{I_{\lambda}^{1}}{\omega-1}x^{-1}\\ \quad+\frac{I_{\lambda}^{2}}{\omega-2}x^{-2}+\frac{I_{\lambda}^{3}}{\omega-3}x^{-3}+\frac{I_{\lambda}^{4}}{\omega-4}x^{-4}+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$+$ const.

On peut prouver que les coefficients des deux séries infinies, dont le produit donne cette expression de y, sont toujours convergents. Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux séries (B), le produit de gauche sera $=1$, et celui de droite donnera, entre autres, l'équation suivante

$$1=(I_{\lambda}^{0})^{2}+2\,(I_{\lambda}^{1})^{2}+2\,(I_{\lambda}^{2})^{2}+2\,(I_{\lambda}^{3})^{2}+\text{etc.}$$

Cette équation montre d'abord que, quelque grande que soit la valeur de y, la transcendante I_{λ}^{0} ne sera jamais plus grande que 1, et que les autres transcendantes ne seront jamais plus grandes que $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Elle fait voir encore que les transcendantes I_{λ}^{0}, I_{λ}^{1}, I_{λ}^{2},..., etc., doivent former une série convergente; car, lorsque la somme d'un nombre infini de quantités positives est égale à une quantité finie (ici $=1$), ces quantités doivent nécessairement devenir de plus en plus petites, jusqu'à se réduire à zéro, c'est-à-dire former une série convergente, à moins qu'elles ne soient *toutes* infiniment petites; mais, sans aller plus loin, les séries (C) font voir immédiatement que les premières de ces transcendantes ne sont point infiniment petites tant que λ n'est pas infiniment grand. Il s'ensuit donc que ces transcendantes forment entre elles une série convergente tant que λ n'est pas infiniment grand (*). Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire que la convergence commence précisément dès les premières de ces transcendantes; mais il peut arriver que, parmi les premières, les unes soient

(*) Lorsque λ est infiniment grand, toutes ces transcendantes sont, en effet, infiniment petites; mais dans ce cas, qui du reste ne peut jamais se présenter, les facteurs d'intégration deviendraient tous égaux à zéro.

plus grandes, les autres plus petites comparativement, et qu'ensuite la convergence commence seulement à avoir lieu. On démontre donc ainsi la convergence des coefficients des deux séries dont se compose y; la seconde converge encore à plus forte raison, parce que les diviseurs ω, $\omega+1$, etc., vont en croissant de part et d'autre à partir du plus petit.

D'après l'expression précédente de y, on peut calculer sans peine les expressions analytiques de tous les facteurs d'intégration; elle peut encore servir pour calculer immédiatement, dans chaque cas particulier, la valeur numérique des facteurs d'intégration. Après avoir calculé les valeurs numériques des transcendantes I^0_λ, I^1_λ, etc., et après avoir effectué les divisions par ω, $\omega+1$, etc., on écrit, sur la partie supérieure d'une feuille de papier, les logarithmes des coefficients de l'un de ces facteurs, et ceux d'un autre facteur sur la partie inférieure d'une seconde feuille de papier, en suivant, pour les uns et les autres, l'ordre selon lequel ils se succèdent ici dans la formule; maintenant, si l'on place ces deux feuilles l'une au-dessus de l'autre, dans chaque position, on aura, les uns au-dessus des autres, les logarithmes dont les sommes sont les logarithmes des termes d'un seul et même facteur d'intégration. En déplaçant l'une des feuilles au-dessus de l'autre, et additionnant chaque fois les logarithmes qui se trouveront les uns au-dessous des autres, on aura ainsi successivement les termes de tous les facteurs d'intégration.

Au reste, on peut encore employer cette expression de y d'une autre manière, en calculant d'après elle, seulement deux facteurs d'intégration pour chaque valeur que prend λ, car on peut alors calculer tous les autres au moyen des expressions finies des art. 40 et 41. L'expression ci-dessus de y donne sans peine

$$\alpha^{\iota}_{\iota+1} = \frac{I^0_\lambda I^1_\lambda}{\omega(\omega+1)} + \frac{3I^1_\lambda I^2_\lambda}{(\omega-1)(\omega+2)} + \frac{5I^2_\lambda I^3_\lambda}{(\omega-2)(\omega+3)} + \frac{7I^3_\lambda I^4_\lambda}{(\omega-3)(\omega+4)} + \text{etc.},$$

$$\alpha^{\iota}_{\iota-1} = \frac{I^0_\lambda I^1_\lambda}{(\omega-1)\omega} + \frac{3I^1_\lambda I^2_\lambda}{(\omega-2)(\omega+1)} + \frac{5I^2_\lambda I^3_\lambda}{(\omega-3)(\omega+2)} + \frac{7I^3_\lambda I^4_\lambda}{(\omega-4)(\omega+3)} + \text{etc.}$$

Si, pour une certaine valeur déterminée de i que je désignerai par ι, on calcule $\alpha^{\iota}_{\iota+1}$ et $\alpha^{\iota}_{\iota-1}$ au moyen de ces expressions, en y substituant $\iota+i'\nu$ pour ω, on pourra ainsi calculer α^{ι}_{ι} à l'aide de la première des équations (A) de l'art. 40; c'est-à-dire

$$\alpha^{\iota}_{\iota} = \frac{1}{\omega} + \frac{\lambda}{\omega}(\alpha^{\iota}_{\iota+1} + \alpha^{\iota}_{\iota-1}).$$

Il est clair qu'ici encore ω doit être entendu pour $\iota + i'\nu$. En effectuant le calcul, on arrive à

$$p_{\iota+1} = \frac{\alpha^{\iota}_{\iota+1}}{\alpha^{\iota}_{\iota}}, \quad q_{\iota-1} = \frac{\alpha^{\iota}_{\iota-1}}{\alpha^{\iota}_{\iota}}.$$

Les équations (B) de l'art. 41 donnent ensuite

$$p_{\iota} \quad = \frac{1}{\frac{\omega}{\lambda} - p_{\iota+1}},$$

$$p_{\iota-1} = \frac{1}{\frac{\omega-1}{\lambda} - p_{\iota}},$$

etc.,

$$p_{\iota+2} = \frac{\omega+1}{\lambda} - \frac{1}{p_{\iota+1}},$$

$$p_{\iota+3} = \frac{\omega+2}{\lambda} - \frac{1}{p_{\iota+2}},$$

etc.;

de même,

$$q_{\iota} \quad = \frac{1}{\frac{\omega}{\lambda} - q_{\iota-1}},$$

$$q_{\iota+1} = \frac{1}{\frac{\omega+1}{\lambda} - q_{\iota}},$$

etc.,

$$q_{\iota-2} = \frac{\omega-1}{\lambda} - \frac{1}{q_{\iota-1}},$$

$$q_{\iota-3} = \frac{\omega-2}{\lambda} - \frac{1}{q_{\iota-2}};$$

c'est-à-dire, en général, p_i et q_i (*). Si l'on calcule ces expressions, l'é-

(*) D'après les propriétés connues des fractions continues, on peut aussi construire des formules qui, pour une valeur quelconque de i, donnent sur-le-champ p_i par suite de p_{ι}, et de même q_{ι} par suite de q_{ι}, sans l'intermédiaire des autres quantités analogues.

quation

$$a_i = \frac{1}{i - i'\nu - \lambda(p_{i+1} + q_{i-1})}$$

donnera les autres facteurs d'intégration.

47. Les calculs que nous venons d'expliquer sont faciles à exécuter quand on connaît les transcendantes I^0_λ, I^1_λ, etc. Lorsque λ est petit, on les calculera facilement à l'aide des séries (C) de l'article précédent; mais, lorsque λ est un grand nombre, cette méthode cesse d'être praticable, parce que ces séries divergent alors fortement dans les premiers termes. Dans tous les cas, le calcul de ces deux transcendantes est très-commode en construisant à l'avance une Table qui les contienne pour une série de valeurs de λ, et d'où l'on puisse les tirer, dans chaque cas particulier, par une interpolation. La Table I donnée plus bas, à la fin de ce Mémoire, contient les deux transcendantes I^0_λ et I^1_λ, depuis $\lambda=0$ jusqu'à $\lambda=10$; on peut donc les obtenir, entre ces limites, dans chaque cas particulier, par une simple interpolation. Ces deux transcendantes suffisent pour calculer, d'une manière très-simple, tontes les autres qui dépendent des mêmes valeurs de λ; elles sont identiques avec celles que Bessel a désignées par I^i_k (*), pourvu que l'on écrive 2λ au lieu de k. Pour le faire voir, je pose ici, comme plus haut,

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos z;$$

d'où il suit, comme on sait,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\cos 2z,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\cos 3z,$$

etc.,

$$x - \frac{1}{x} = 2\rho \sin z,$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 2\rho \sin 2z,$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 2\rho \sin 3z,$$

etc.,

(*) Voyez Bessel, *Recherche de la partie des perturbations planétaires qui provient du mouvement du Soleil*, dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin*, année 1824. — Ces mêmes transcendantes se rencontrent aussi dans les Mémoires sur la Chaleur, par Fourier (*Théorie de la Chaleur*, chap. VI).

où $\rho = \sqrt{-1}$. Substituons ces équations dans la première des séries (B) de l'art. 46, on aura

$$c^{2\lambda\rho \sin z} = I^0_\lambda + 2\rho I^1_\lambda \sin z + 2I^2_\lambda \cos 2z + 2\rho I^3_\lambda \sin 3z + \text{etc.}$$

En appliquant un théorème connu à cette série, on obtient :

Lorsque i est un nombre *impair,*

$$(\text{A}) \qquad \rho I^i_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} \sin iz dz\,;$$

et lorsque i est un nombre *pair,*

$$(\Theta) \qquad I^i_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} \cos iz dz.$$

Soit maintenant, dans le cas où i est *impair,*

$$V = c^{2\lambda\rho \sin z} \cos iz\,;$$

il s'ensuit :

$$dV = \rho\lambda c^{2\rho\lambda \sin z}[\cos(i+1)z + \cos(i-1)z]dz - ic^{2\rho\lambda \sin z} \sin iz\, dz.$$

Mais lorsque i est impair, $i+1$ et $i-1$ sont pairs, pour cette raison, et parce que $\int dV = 0$ entre les limites 0 et 2π, les équations précédentes donnent

$$0 = \lambda\left\{I^{i+1}_\lambda + I^{i-1}_\lambda\right\} - iI^i_\lambda.$$

Soit ensuite, quand i est *pair,*

$$V = c^{2\lambda\rho \sin z} \sin iz,$$

et, par conséquent,

$$dV = \rho\lambda c^{2\rho\lambda \sin z}[\sin(i+1)z + \sin(i-1)z]dz + ic^{2\rho\lambda \sin z} \cos iz\, dz\,;$$

cette expression donne, de la même manière que plus haut,

$$0 = \lambda\left\{I^{i+1}_\lambda + I^{i-1}_\lambda\right\} - iI^i_\lambda.$$

Cette dernière équation est la même que celle que nous avons trouvée dans la supposition que i serait *impair.* Elle a donc lieu entre trois quelconques

de ces transcendantes, et elle est identique avec celle donnée par Bessel, dans le Mémoire cité plus haut.

L'équation (Θ) ci-dessus, lorsqu'on y fait $i = 0$, donne

$$I^0_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\rho\lambda \sin z}\, dz,$$

ou bien en introduisant, au lieu des exponentielles imaginaires, leurs expressions en fonction de sinus et de cosinus,

$$I^0_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(2\lambda \sin z) + \rho \sin(2\lambda \sin z)]\, dz;$$

mais on trouve facilement

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\lambda \sin z)\, dz = 0:$$

ainsi

$$I^0_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\lambda \sin z)\, dz,$$

qui est l'expression connue pour cette transcendante, lorsqu'on substitue k à la place de 2λ. On ramènerait de la même manière l'équation (A) à la forme connue de la transcendante I^1_λ.

48. M. Bessel a donné, dans son Mémoire cité plus haut, une Table pour les deux transcendantes I^0_λ et I^1_λ qui s'étend jusqu'à $k = 3{,}2$, c'est-à-dire jusqu'à $\lambda = 1{,}6$. Mais comme ce développement ne suffirait pas pour le but que nous nous proposons, j'ai calculé la Table dont il est question dans l'article précédent, comme une continuation de celle de M. Bessel, et je l'ai poussée jusqu'à $\lambda = 10$, c'est-à-dire jusqu'à $k = 20$. On prévoit qu'il peut se présenter des cas où λ dépasse la valeur 10, mais ces cas seront rares; seulement on ne pourrait pas dès maintenant déterminer la limite des plus grandes valeurs de λ qui puissent se présenter. En tout cas, je vais donner un moyen de faire servir cette Table limitée, au calcul numérique de la transcendante en question, quelle que soit la valeur de λ. Ce moyen consiste dans la duplication de cette transcendante. Si dans la première série (B) de l'art. 46 on écrit 2λ

au lieu de λ, on obtient

$$c^{2\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \mathrm{I}^0_{2\lambda} + \mathrm{I}^1_{2\lambda}\,x + \mathrm{I}^2_{2\lambda}\,x^2 + \mathrm{I}^3_{2\lambda}\,x^3 + \text{etc.}$$
$$- \mathrm{I}^1_{2\lambda}\,\frac{1}{x} + \mathrm{I}^2_{2\lambda}\,\frac{1}{x^2} - \mathrm{I}^3_{2\lambda}\,\frac{1}{x^3} \pm \text{etc.}$$

Si l'on élève au carré cette même série (B), on aura

$$c^{2\lambda\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \left(\mathrm{I}^0_\lambda\right)^2 + 2\mathrm{I}^0_\lambda\,\mathrm{I}^1_\lambda\,x + 2\mathrm{I}^0_\lambda\,\mathrm{I}^2_\lambda\,x^2 + \text{etc.}$$
$$- 2\mathrm{I}^0_\lambda\,\mathrm{I}^1_\lambda\,\frac{1}{x} + 2\mathrm{I}^0_\lambda\,\mathrm{I}^2_\lambda\,\frac{1}{x^2} + \text{etc.}$$
$$+ \left(\mathrm{I}^1_\lambda\right)^2 x^2 + 2\mathrm{I}^1_\lambda\,\mathrm{I}^2_\lambda\,x^3 + \text{etc.}$$
$$- 2\left(\mathrm{I}^1_\lambda\right)^2 + 2\mathrm{I}^1_\lambda\,\mathrm{I}^2_\lambda\,\frac{1}{x} \mp \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

En comparant cette expression avec la précédente, on aura, pour la duplication de la transcendante, les séries suivantes :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \mathrm{I}^0_{2\lambda} = \left(\mathrm{I}^0_\lambda\right)^2 - 2\left(\mathrm{I}^1_\lambda\right)^2 + 2\left(\mathrm{I}^2_\lambda\right)^2 - 2\left(\mathrm{I}^3_\lambda\right)^2 \pm \text{etc.}, \\ \mathrm{I}^1_{2\lambda} = 2\mathrm{I}^0_\lambda\mathrm{I}^1_\lambda - 2\mathrm{I}^1_\lambda\,\mathrm{I}^2_\lambda + 2\mathrm{I}^2_\lambda\,\mathrm{I}^3_\lambda - 2\mathrm{I}^3_\lambda\,\mathrm{I}^4_\lambda \pm \text{etc.}; \end{cases}$$

ainsi de suite. Au moyen de l'équation

$$1 = \left(\mathrm{I}^0_\lambda\right)^2 + 2\left(\mathrm{I}^1_\lambda\right)^2 + 2\left(\mathrm{I}^2_\lambda\right)^2 + 2\left(\mathrm{I}^3_\lambda\right)^2 + \text{etc.},$$

obtenue à l'art. 46, on peut simplifier la première de ces deux séries, et la ramener à volonté à l'une ou à l'autre des deux formes suivantes :

$$\mathrm{I}^0_{2\lambda} = -1 + 2\left(\mathrm{I}^0_\lambda\right)^2 + 4\left(\mathrm{I}^2_\lambda\right)^2 + 4\left(\mathrm{I}^4_\lambda\right)^2 + \text{etc.},$$
$$\mathrm{I}^0_{2\lambda} = 1 - 4\left(\mathrm{I}^1_\lambda\right)^2 - 4\left(\mathrm{I}^3_\lambda\right)^2 - 4\left(\mathrm{I}^5_\lambda\right)^2 - \text{etc.}$$

On peut en général, d'une manière analogue, opérer la multiplication et la division de ces transcendantes au moyen des séries (B); mais, pour des nombres plus grands que 2, les séries deviennent très-compliquées. Mainte-

nant, si l'on veut calculer cette transcendante pour une certaine valeur de λ, qui dépasse les limites de la Table, et que je désignerai par λ', on peut toujours trouver un nombre entier m tel que $\frac{\lambda'}{2^m}$ soit compris entre les limites de la Table. Avec la valeur

$$\lambda = \frac{\lambda'}{2^m},$$

on peut tirer de la Table, par une interpolation, les transcendantes I^0_λ et I^1_λ, et calculer toutes celles qui dépendent de cette valeur de λ au moyen de l'équation de condition donnée à l'article précédent. Cela fait, les équations (I) développées ci-dessus, en les appliquant m fois, donneront les transcendantes cherchées $I^0_{\lambda'}$ et $I^1_{\lambda'}$.

Lorsque l'on a une fois, dans un cas particulier, tiré de la Table I les transcendantes I^0_λ et I^1_λ, la relation trouvée plus haut entre trois quelconques d'entre elles donnera

$$I^2_\lambda = \frac{1}{\lambda} I^1_\lambda - I^0_\lambda,$$

$$I^3_\lambda = \frac{2}{\lambda} I^2_\lambda - I^1_\lambda,$$

etc.,

et, en général,

$$I^{i+1}_\lambda = \frac{i}{\lambda} I^i_\lambda - I^{i-1}_\lambda,$$

$$I^{i+2}_\lambda = \frac{i+1}{\lambda} I^{i+1}_\lambda - I^i_\lambda.$$

Mais, si en appliquant ces équations on poursuit jusqu'à ce qu'on arrive à $i > \lambda$, alors l'exactitude avec laquelle on peut calculer les transcendantes suivantes au moyen de celles-ci, va en diminuant, et les erreurs qui affectent le dernier chiffre décimal des deux premières transcendantes augmentent tellement, qu'à la fin les premiers chiffres eux-mêmes deviennent inexacts. C'est ce qui arrive en particulier lorsque la transcendante est devenue si petite qu'elle a à sa gauche un nombre de zéros égal à la moitié du nombre des décimales avec lesquelles on a commencé le calcul; par exemple, avec les valeurs de I^0_λ et I^1_λ de la Table I relatives à $\lambda = 4$, qui sont données à 6 décimales, et de l'exactitude desquelles je puis répondre jusqu'à une unité de la dernière décimale, si l'on calcule les transcendantes suivantes, qui dépendent

de la même valeur de λ, on arrivera, entre autres, à

$$I_4^{15} = +\ 0{,}000181,$$

tandis que la vraie valeur est

$$I_4^{15} = +\ 0{,}000293.$$

Pour remédier à cet inconvénient, il y a deux moyens: le premier consisterait à calculer la Table pour I_λ^0 et I_λ^1 avec nn nombre de décimales au moins double de celui que l'on regarde comme nécessaire pour l'application suivante; pour le second moyen, il faudrait calculer une seconde Table qui donnât deux autres transcendantes relatives à une valeur plus grande de l'indice *i*. Comme le premier moyen entraîne à un travail beaucoup plus considérable, soit pour le calcul de la Table elle-même, soit pour son emploi ultérieur, j'ai préféré le second; j'ai donc ajouté la Table II, qui contient les transcendantes relatives à de plus grands indices, qui sont indiqués dans les titres.

Pour employer concurremment ces deux Tables, il suffit de calenler, au moyen de la seconde, les transcendantes avec des indices *i* de plus en plus petits, jusqu'à ce que leurs valeurs s'accordent avec celles qu'on a obtenues au moyen de la première Table; alors on pourra continuer le calcul avec la seconde Table. Par exemple, pour $\lambda = 4$,

	Par la Table I.	Par la Table II.	Differ.
$I_4^{15} =$	+ 0,000181	+ 0,000293	+ 0,000112
$I_4^{14} =$	0,000984	0,001019	+ 0,000035
$I_4^{13} =$	0,003262	0,003275	+ 0,000013
$I_4^{12} =$	0,009619	0,009624	+ 0,000005
$I_4^{11} =$	0,025594	0,025596	+ 0,000002
$I_4^{10} =$	0,060766	0,060766	0,000000

Dans ce cas, on ne peut donc calculer les transcendantes au moyen de la première Table que jusqu'à I_4^{10}, lorsqu'on veut les avoir exactes jusqu'aux derniers chiffres décimaux. Dans beaucoup de cas, du reste, sur les six chiffres décimaux que donne la Table I, les trois derniers sont superflus pour la pra-

tique, et l'on peut alors, sans recourir à la Table II, calculer toutes les transcendantes dont on a besoin avec une exactitude suffisante en partant de I^0_λ et de I^1_λ.

49. Dans l'article précédent, j'ai montré comment on peut calculer les transcendantes I^i_λ pour des valeurs de λ qui dépassent les limites de la Table, en se servant des transcendantes qu'elle contient; mais cette méthode cesse d'être commodément applicable lorsque l'exposant m n'est pas un nombre très-petit. Je vais donc développer des expressions au moyen desquelles on pourra calculer directement I^i_λ, lorsque λ dépasse les limites de la Table, ou en général lorsqu'il est très-grand. J'obtiens ces expressions en développant la transcendante I^0_λ en une série ordonnée d'après les puissances décroissantes de λ. Les équations (Λ) et (Θ) de l'art. 47 donnent

$$I^0_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z}\, dz,$$

$$\rho\, I^1_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} \sin z\, dz,$$

$$I^2_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} \cos 2z\, dz.$$

En différentiant la première de ces équations, nous aurons

$$\frac{dI^0_\lambda}{d\lambda} = \frac{\rho}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} \sin z\, dz = -\, 2I^1_\lambda,$$

$$\frac{d^2I^0_\lambda}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{2\lambda\rho \sin z} (1 - \cos 2z)\, dz = 2I^2_\lambda - 2I^0_\lambda,$$

qui, avec l'équation de condition

$$I^2_\lambda - \frac{1}{\lambda} I^1_\lambda + I^0_\lambda = 0,$$

donneront l'équation différentielle linéaire du second ordre qui suit:

$$(1) \qquad \frac{d^2I^0_\lambda}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dI^0_\lambda}{d\lambda} + 4I^0_\lambda = 0.$$

Supposons maintenant que λ soit un grand nombre; alors le terme $\frac{1}{\lambda}\frac{dI^{\circ}_{\lambda}}{d\lambda}$ est très-petit, et nous pourrons le négliger dans une première approximation. Nous aurons donc provisoirement à intégrer l'équation

$$\frac{d^2I^{\circ}_{\lambda}}{d\lambda^2} + 4I^{\circ}_{\lambda} = 0,$$

dont l'intégrale est, comme on sait,

$$I^{\circ}_{\lambda} = k\cos 2\lambda + k'\sin 2\lambda,$$

k et k' étant les constantes à ajouter à l'intégrale. On peut considérer cette expression de I°_{λ} comme une valeur approchée de cette trancendante lorsque λ est un grand nombre. Substituons-la dans l'équation (1), et considérons k et k' comme des quantités variables dans les différentiations qu'il faudra effectuer. Comme il doit en résulter une équation identique, il s'ensuit que les coefficients de $\sin 2\lambda$ et de $\cos 2\lambda$ doivent être, chacun en particulier, égaux à zéro; on aura ainsi

$$\frac{d^2k}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk}{d\lambda} + 4\frac{dk'}{d\lambda} + \frac{2k'}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2k'}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dk'}{d\lambda} - 4\frac{dk}{d\lambda} - \frac{2k}{\lambda} = 0.$$

Posons maintenant

$$k = \frac{\alpha}{\lambda^a} + \frac{\alpha_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\alpha_2}{\lambda^{a+2}} + \text{etc.},$$

$$k' = \frac{\beta}{\lambda^a} + \frac{\beta_1}{\lambda^{a+1}} + \frac{\beta_2}{\lambda^{a+2}} + \text{etc.}$$

Substituons, dans les équations précédentes, les valeurs de k et de k', dans lesquelles α, α_1, ..., β, β_1, ... sont des constantes, et alors les termes multipliés par les différentes puissances de λ donneront les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
2\beta - 4\alpha\beta &= 0, & 2\alpha - 4a\alpha &= 0;\\
a^2\alpha - (4a+2)\beta_1 &= 0, & a^2\beta + (4a+2)\alpha_1 &= 0;\\
(a+1)^2\alpha_1 - (4a+6)\beta_2 &= 0, & (a+1)^2\beta_1 + (4a+6)\alpha_2 &= 0;\\
(a+2)^2\alpha_2 - (4a+10)\beta_3 &= 0, & (a+2)^2\beta_2 + (4a+10)\alpha_3 &= 0;\\
\text{etc.}, & & \text{etc.} &
\end{aligned}$$

La première équation de chacun de ces groupes donne $a=\frac{1}{2}$, et par conséquent les suivantes deviennent

$$
\begin{array}{ll}
\frac{1}{4}\alpha-4\beta_1=0, & \frac{1}{4}\beta+4\alpha_1=0;\\
\frac{9}{4}\alpha_1-8\beta_2=0, & \frac{9}{4}\beta_1+8\alpha_2=0;\\
\frac{25}{4}\alpha_2-12\beta_3=0, & \frac{25}{4}\beta_2+12\alpha_3=0;\\
\frac{49}{4}\alpha_3-16\beta_4=0, & \frac{49}{4}\beta_3+16\alpha_4=0;\\
\frac{81}{4}\alpha_4-20\beta_5=0, & \frac{81}{4}\beta_4+20\alpha_5=0;\\
\text{etc.}, & \text{etc.}
\end{array}
$$

On peut continuer celles-ci aussi loin que l'on voudra, la loi de la série est évidente; on conclut de ces équations

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1=-\frac{1}{16}\beta, & \beta_1=\frac{1}{16}\alpha;\\
\alpha_2=-\frac{9}{512}\alpha, & \beta_2=-\frac{9}{512}\beta;\\
\alpha_3=+\frac{75}{8192}\beta, & \beta_3=-\frac{75}{8192}\alpha;\\
\alpha_4=+\frac{3675}{524288}\alpha, & \beta_4=+\frac{3675}{524288}\beta;\\
\alpha_5=-\frac{297675}{41943040}\beta, & \beta_5=+\frac{297675}{41943040}\alpha;\\
\text{etc.}, & \text{etc.},
\end{array}
$$

α et β restant quelconques. Nous obtenons ainsi :

$$k=\frac{\alpha}{\lambda^{\frac{1}{2}}}-\frac{\beta}{16\lambda^{\frac{3}{2}}}-\frac{9\alpha}{512\lambda^{\frac{5}{2}}}+\frac{75\beta}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}}+\frac{3675\alpha}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}}-\frac{297675\beta}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}}\mp\text{etc.},$$

$$k'=\frac{\beta}{\lambda^{\frac{1}{2}}}+\frac{\alpha}{16\lambda^{\frac{3}{2}}}-\frac{9\beta}{512\lambda^{\frac{5}{2}}}-\frac{75\alpha}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}}+\frac{3675\beta}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}}+\frac{297675\alpha}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}}\mp\text{etc.}$$

Substituons ces expressions dans celle que nous avons trouvée plus haut

pour I^0_λ, et faisons-y $\alpha = c \cos c'$, $\beta = c \sin c'$, il viendra

$$I^0_\lambda = c\left\{\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{9}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{3675}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\cos(2\lambda - c'),$$

$$+ c\left\{\frac{1}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{75}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{297675}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.}\right\}\sin(2\lambda - c'),$$

et cette expression, à cause des deux constantes arbitraires c et c' qu'elle contient, sera l'intégrale complète de l'équation (1). Plus λ sera grand, plus le calcul de I^0_λ au moyen de cette équation sera exact; les séries que l'on y rencontre appartiennent à cette espèce de séries, dont les coefficients convergent dans les premiers termes, et ensuite commencent à diverger peu à peu. Plus λ est considérable, plus cette divergence commence tard relativement aux termes complets de cette série, et, par conséquent plus on peut calculer exactement I^0_λ. Lorsque λ est très-grand, le premier terme de la première série peut suffire; et, dans ce cas, le calcul de cette expression devient très-court. Mais lorsque λ n'est pas très-grand, on peut aussi, au moyen de l'expression ci-dessus, calculer I^0_λ avec une exactitude suffisante pour la plupart des cas, comme je le ferai voir plus bas par un exemple numérique.

50. Il nous reste à déterminer les constantes c et c'. Pour y arriver, je développerai le premier terme de l'expression de I^0_λ d'une manière analogue à la méthode donnée par *Laplace* pour obtenir les intégrales qui dépendent de grands nombres. Dans l'art. **47**, on a trouvé l'expression suivante :

$$I^0_\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\lambda \sin z)\, dz.$$

On peut partager cette intégrale en quatre parties égales, qui s'étendent respectivement de 0 à $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ à π; de π à $\frac{3}{2}\pi$, et de $\frac{3}{2}\pi$ à 2π; on a ainsi :

$$I^0_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\lambda \sin z)\, dz.$$

Substituons-y, pour le cosinus, son expression en exponentielles imaginaires,

nous aurons

$$I^0_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{2\rho\lambda \sin z} dz + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{-2\rho\lambda \sin z} dz,$$

c étant la base des logarithmes hyperboliques, et $\rho = \sqrt{-1}$. Posons maintenant, dans la première de ces intégrales,

$$2\rho\lambda \sin z = 2\rho\lambda - t^2,$$

on aura

$$dz = \frac{-dt}{\sqrt{\rho\lambda} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4\rho\lambda}}},$$

et les valeurs suivantes se correspondront :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad t = \sqrt{2\rho\lambda};$$
$$z = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad t = 0.$$

Posons dans la seconde intégrale

$$-2\rho\lambda \sin z = -2\rho\lambda - t^2,$$

nous aurons

$$dz = -\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{\rho t^2}{4\lambda}}},$$

et les valeurs correspondantes seront

$$z = 0 \quad \text{et} \quad t = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}};$$
$$z = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad t = 0.$$

De cette manière, notre expression de I^0_λ devient

$$I^0_\lambda = \frac{c^{2\rho\lambda}}{\pi\sqrt{\rho}\cdot\sqrt{\lambda}} \int_0^a \frac{c^{-t^2} dt}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4\rho\lambda}}} + \frac{c^{-2\rho\lambda}\sqrt{\rho}}{\pi\sqrt{\lambda}} \int_0^b \frac{c^{-t^2} dt}{\sqrt{1 - \frac{\rho t^2}{4\lambda}}},$$

où nous avons écrit, pour abréger, a au lieu de $\sqrt{2\rho\lambda}$, et b au lieu de $\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho}}$. Comme nous n'avons à rechercher ici que le premier terme du

développement de I^{a}_{j}, ce terme étant, par suite de l'article précédent, divisé par $\lambda^{\frac{1}{2}}$, et comme les coefficients des intégrales de l'expression qui précède contiennent déjà ce diviseur, il ne nous reste qu'à obtenir les termes de ces intégrales, qui sont indépendants de λ. D'après les limites o et respectivement a et b, on reconnaît que, dans les limites des intégrales, les valeurs des radicaux qui se trouvent au dénominateur varient entre 1 et $\sqrt{\frac{1}{2}}$; on peut donc les développer en séries infinies convergentes. Après ce développement, nous aurons une série d'intégrales de la forme

$$A\frac{1}{(4\rho\lambda)^n}\int_0^a t^{2n}c^{-t^2}\,dt, \qquad \text{et} \qquad A\left(\frac{\rho}{4\lambda}\right)^n\int_0^b t^{2n}c^{-t^2}\,dt,$$

où A exprime les coefficients du binôme relatifs à la puissance $-\frac{1}{2}$, et n est un nombre entier et positif. La forme connue de ces intégrales nous donne pour la première, en désignant par $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ les coefficients numériques de chaque terme,

$$\frac{1}{(4\rho\lambda)^n}\int_0^a t^{2n}c^{-t^2}\,dt = \frac{c^{-2\rho\lambda}}{2^n}\left\{\alpha(2\rho\lambda)^{-\frac{1}{2}} + \beta(2\rho\lambda)^{-\frac{3}{2}} + \ldots + \theta(2\rho\lambda)^{-n+\frac{1}{2}}\right\}$$
$$-\theta\frac{\sqrt{\pi}}{2(4\rho\lambda)^n} + \theta\frac{c^{-2\rho\lambda}}{2^n(2\rho\lambda)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1 - \frac{1}{2(2\rho\lambda)} + \ldots\right\}.$$

On aurait une expression analogue pour l'autre intégrale. Il suit de là que, lorsque n n'est pas $= 0$, ces intégrales ne contiennent aucun terme qui n'ait pas λ au dénominateur; elles peuvent donc être négligées, et il ne reste à considérer que le premier terme du développement en série du radical qui se trouve au dénominateur de nos intégrales, savoir :

$$\int_0^a c^{-t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^b c^{-t^2}\,dt,$$

à la place desquelles nous pouvons écrire

$$\int_0^\infty c^{-t^2}\,dt - \int_a^\infty c^{-t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty c^{-t^2}\,dt - \int_b^\infty c^{-t^2}\,dt.$$

Mais, comme pour une valeur initiale quelconque c, on a

$$\int_c^\infty = \frac{c^{-c^2}}{c}\left\{1 - \frac{1}{2c^2} + \ldots\right\},$$

et, comme on ne trouve ici non plus aucun terme indépendant de c, notre expression de I°_{λ} se réduit enfin à la suivante :

$$I^{\circ}_{\lambda} = \left\{ \frac{e^{2\rho\lambda}}{\sqrt{\rho}} + e^{-2\rho\lambda}\sqrt{\rho} \right\} \frac{1}{\pi\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Mais comme on a

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\sqrt{\rho} = \cos\frac{\pi}{4} + \rho \sin\frac{\pi}{4} = e^{\frac{1}{4}\rho\pi},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} = \cos\frac{\pi}{4} - \rho \sin\frac{\pi}{4} = e^{-\frac{1}{4}\rho\pi},$$

par la substitution de ces quantités, l'expression ci-dessus se change en la suivante :

$$I^{\circ}_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\lambda^{\frac{1}{2}}} \cos\left(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

Comparons cette expression avec le premier terme de l'expression de I°_{λ} développée à l'article précédent ; nous aurons, pour les constantes désignées par c et c', les valeurs suivantes :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad c' = \tfrac{1}{4}\pi,$$

et nous aurons ainsi l'équation complète

$$\begin{aligned} I^{\circ}_{\lambda} = {} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} - \frac{9}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} + \frac{3675}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \mp \text{etc.} \right\} \cos\left(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi\right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{75}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{297675}{4194304\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.} \right\} \sin\left(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

51. On a trouvé, à l'art. 49, l'équation

$$I^{1}_{\lambda} = -\tfrac{1}{2}\frac{dI^{\circ}_{\lambda}}{d\lambda}.$$

Si nous y introduisons l'expression que nous venons de trouver pour I°_{λ},

nous aurons

$$I^1_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{15}{512\lambda^{\frac{5}{2}}} - \frac{4725}{524288\lambda^{\frac{9}{2}}} \pm \text{etc.} \right\} \sin\left(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{3}{16\lambda^{\frac{3}{2}}} - \frac{105}{8192\lambda^{\frac{7}{2}}} + \frac{363825}{41943040\lambda^{\frac{11}{2}}} \mp \text{etc.} \right\} \cos\left(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi\right).$$

Au moyen des équations (A) et (Θ) de l'art. **47**, on a, en général,

$$I^{i+1}_\lambda = \frac{i}{2\lambda} I^i_\lambda - \tfrac{1}{2} \frac{dI^i_\lambda}{d\lambda};$$

on peut donc, en continuant la différentiation de l'expression trouvée ci-dessus pour I^0_λ, exprimer explicitement toutes les transcendantes I^i_λ par des séries ordonnées d'après les puissances décroissantes de λ; mais, à chaque différentiation, la convergence diminue, et par conséquent il est plus avantageux de se borner à exprimer explicitement I^0_λ et I^1_λ de cette manière, et de calculer les autres, en partant de celles-ci, au moyen de l'équation de condition

$$I^{i+1}_\lambda = \frac{i}{\lambda} I^i_\lambda - I^{i-1}_\lambda.$$

Afin de montrer combien les valeurs de λ peuvent être petites, sans que les séries décroissantes ci-dessus cessent d'être applicables (*), je vais comparer les valeurs de I^0_4 et I^1_4 calculées par ce moyen avec les valeurs rigoureuses déduites

(*) De cette série on tire, entre autres, l'equation

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\pi\left(k + \tfrac{1}{4}\right) + \frac{1}{32\lambda} - \frac{25}{6144\lambda^3} + \frac{1073}{327680\lambda^5} \mp \text{etc.},$$

qui, lorsqu'on y fait successivement $k = 0, = 1, = 2$, etc., donne toutes les racioes de l'équation transcendante $I^0_\lambda = 0$, et cela avec une approximation d'autant plus grande quo k est plus grand. De même, l'équation

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\pi\left(k + \tfrac{3}{4}\right) - \frac{3}{32\lambda} + \frac{21}{2048\lambda^3} - \frac{1899}{327680\lambda^5} \pm \text{etc.}$$

donne, dans les mêmes circonstances, toutes les racines de l'equation $I^1_\lambda = 0$; cependant ici, la racine $\lambda = 0$ ne s'obtient qu'avec une bien moindre approximatioo. On peut dé-

des séries ascendantes. Posons $\lambda = 4$; alors, après avoir supprimé les circonférences entières, nous arrivons à

$$2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi = 53^\circ 21' 58'',45 \left\{ \begin{array}{l} \log\cos = 9,7757545, \\ \log\sin = 9,9044267, \end{array} \right.$$

et les valeurs des coefficients de l'expression pour I^0_4 sont successivement

	+ 0,2820947	+ 0,0044077
	− 0,0003099	− 0,0000404
	+ 0,0000077	+ 0,0000019
Somme. .	+ 0,2817925	+ 0,0043692

Si l'on multiplie le premier de ces nombres par $\cos(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi)$, et l'autre par $\sin(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi)$, on aura

$$\begin{array}{r} + \; 0,1681450 \\ + \; 0,0035061 \\ \hline I^0_4 = + \; 0,1716511 \end{array}$$

Pour le calcul de I^1_4, on trouve successivement les coefficients de l'expression donnée plus haut, comme il suit

	+ 0,2820947	+ 0,0132232
	+ 0,0005165	− 0,0000565
	− 0,0000099	+ 0,0000024
Somme. .	+ 0,2826013	+ 0,0131691

et après avoir multiplié ces sommes respectivement par $\sin(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi)$ et par $\cos(2\lambda - \tfrac{1}{4}\pi)$, on a

$$\begin{array}{r} + \; 0,2267779 \\ + \; 0,0078580 \\ \hline I^1_4 = + \; 0,2346359 \end{array}$$

Calculons ces mêmes transcendantes par les séries (C) de l'art. 46; nous

---

duire des équations analogues pour les autres équations transcendantes $I^i_\lambda = 0$. Ces équations, sous la forme ci-dessus, peuvent être facilement résolues par approximation, et elles font sur-le-champ reconnaître que, lorsque λ et par conséquent aussi λ sont de grands nombres, la différence entre deux racines consécutives est sensiblement égale à $\tfrac{1}{4}\pi$.

obtiendrons pour I_4^0 les valeurs numériques suivantes de chaque terme :

	Termes positifs.	Termes négatifs.
	1	
	64	16
	113,77777777	113,77777777
	32,36345679	72,81777777
	2,64191484	10,56765936
	0,08349756	0,52185972
	0,00122677	0,01104100
	0,00000948	0,00011615
	0,00000004	0,00000067
Somme. .	213,86788325	213,69623244
	— 213,69623244	
$I_4^0 =$	+ 0,1716508	

différence avec la valeur calculée plus haut = 0,0000003. Pour I_4^1, nous aurons

	Termes positifs.	Termes négatifs.
4 ×	1	8
	21,33333333	28,44444444
	22,75555555	12,13629629
	4,62335097	1,32095742
	0,29354609	0,05218597
	0,00759069	0,00092008
	0,00009436	0,00000830
	0,00000063	0,00000004
Somme....	50,01347162	49,95481254
	— 49,95481254	
	+ 0,05865908	
$I_4^1 =$	+ 0,2346363	

différence avec la valeur calculée ci-dessus = 0,0000004.

32. Les expressions développées dans ce qui précède vont maintenant nous servir à obtenir W au moyen de $\frac{T\,dt}{du}$. Comme dans le paragraphe précédent nous avons amené cette quantité à la forme suivante

$$T\,dt = \Sigma(\varkappa, i, i')_s \sin(\varkappa v + iu + i'g')\,du + \Sigma(\varkappa, i, i')_c \cos(\varkappa v + iu + i'g')\,du,$$

où $(\varkappa, i, i')_s$ et $(\varkappa, i, i')_c$ sont des coefficients numériques; les intégrales développées dans ce même paragraphe seront immédiatement applicables en faisant

$$A = \varkappa v.$$

Pour cette raison, et parce que l'indice $\varkappa$ ne peut avoir que les trois valeurs o, +1 et −1, l'intégrale prend la forme suivante

$$\begin{aligned}\int T dt = \Sigma \{\varkappa, i, i'\}_c \cos(\varkappa v + iu + i'g') + \Sigma \{\varkappa, i, i'\}_s \sin(\varkappa v + iu + i'g') \\ + (1, 0, 0)_c\, u \cos v + (1, 0, 0)_s\, u \sin v + (0, 0, 0)_c\, u,\end{aligned}$$

où

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \{\varkappa, i, i'\}_s = (\varkappa, i, i')_c\, \alpha^{i}_{i} + (\varkappa, i-1, i')_c\, \alpha^{i-1}_{i-1}\, p_i \\ + (\varkappa, i-2, i')_c\, \alpha^{i-2}_{i-2}\, p_{i-1} p_i + \text{etc.} \\ + (\varkappa, i+1, i')_c\, \alpha^{i+1}_{i+1}\, q_i + (\varkappa, i+2, i')_c\, \alpha^{i+2}_{i+2}\, q_{i+1} q_i + \text{etc.,}\end{aligned}\right.$$

et $-\{\varkappa, i, i'\}_c$ est formé de la même manière au moyen de $(\varkappa, i, i')_s$. Changeons maintenant, dans l'expression de W donnée à l'art. **30**, l'anomalie vraie en anomalie excentrique, nous aurons

$$W = -b + 2\xi(\cos v + \tfrac{1}{2}e) - 2\eta\sqrt{1-e^2}.\sin v + \int T dt.$$

On voit ainsi que les termes hors du signe de l'intégration ont la même forme que ceux qui sont sous ce signe, et par conséquent se réunissent avec quelques-uns d'entre eux. J'ai fait voir, à l'art. **30**, comment on devait déterminer les quantités b, ξ, η lorsque l'on prend les éléments osculateurs comme base du calcul. Après avoir déterminé les valeurs des quantités b, ξ, η, et après avoir changé v en u, nous aurons

$$\begin{aligned}\overline{W} = \Sigma \{i, i'\}_c \cos(iu + i'g') + \Sigma \{i, i'\}_s \sin(iu + i'g') \\ + (1, 0, 0)_c\, u \cos u + (1, 0, 0)_s\, u \sin u + (0, 0, 0)_c\, u,\end{aligned}$$

où

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \{i, i'\}_c = \{0, i, i'\}_c + \{-1, i+1, i'\}_c + \{1, i-1, i'\}_c, \\ \{i, i'\}_s = \{0, i, i'\}_s + \{-1, i+1, i'\}_s + \{1, i-1, i'\}_s,\end{aligned}\right.$$

excepté

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \{0, 0\}_c = \{1, -1, 0\}_c - b + e\xi, \\ \{1, 0\}_c = \{0, 1, 0\}_c + \{-1, 2, 0\}_c + 2\xi, \\ \{1, 0\}_s = \{0, 1, 0\}_s + \{-1, 2, 0\}_s - 2\sqrt{1-e^2}.\eta.\end{aligned}\right.$$

35. Maintenant, comme

$$nz = g + n\int \overline{W}dt,$$

nous pouvons, au moyen des coefficients de $\overline{W}$, dont on vient d'indiquer le calcul, déduire immédiatement les coefficients correspondants de nz. Nous avons tout d'abord

$$
\begin{aligned}
& n\,(1,0,0)_c \int u \cos u\,dt + n\,(1,0,0)_s \int u \sin u\,dt + n\,(0,0,0)_c \int u\,dt \\
= & \left[\tfrac{1}{2}(0,0,0)_c - \tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_c\right] n^2 t^2 \\
+ & (1 - \tfrac{1}{2}e^2)\,(1,0,0)_c\, nt \sin u - (1,0,0)_s\, nt \cos u \\
- & \tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_c\, nt \sin 2u + \tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_s\, nt \cos 2u \\
+ & (1 - \tfrac{1}{8}e^2)\,(1,0,0)_s \sin u + \left[(1 - \tfrac{1}{8}e^2)\,(1,0,0)_c - e\,(0,0,0)_c\right] \cos u \\
- & \tfrac{5}{8}e\,(1,0,0)_s \sin 2u + \left[(\tfrac{1}{8}e^3 - \tfrac{5}{8}e)\,(1,0,0)_c + \tfrac{1}{2}e^2\,(0,0,0)_c\right] \cos 2u \\
+ & \tfrac{1}{8}e^2\,(1,0,0)_s \sin 3u + \tfrac{1}{8}e^2\,(1,0,0)_c \cos 3u.
\end{aligned}
$$

Il faut ici remarquer que les deux parties dont se compose le terme multiplié par t^2 doivent se détruire mutuellement ; ainsi

$$\tfrac{1}{2}(0,0,0)_c - \tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_c = 0;$$

cette équation peut servir à vérifier une partie du calcul numérique. Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
nz = g + \Sigma\,[i,i']_s \sin(iu + i'g') &+ \Sigma\,[i,i']_c \cos(iu + i'g') \\
+ \alpha_1 t \sin u \qquad\qquad &+ \beta_1 t \cos u \\
+ \alpha_2 t \sin 2u \qquad\qquad &+ \beta_2 t \cos 2u,
\end{aligned}
$$

où

$$
(1)\quad \begin{cases}
\alpha_1 = n\,(1 - \tfrac{1}{2}e^2)\,(1,0,0)_c, \\
\beta_1 = - n\,(1,0,0)_s, \\
\alpha_2 = - n\,\tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_c, \\
\beta_2 = n\,\tfrac{1}{4}e\,(1,0,0)_s,
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
[i,i']_s = \dfrac{1}{i'y}\{i,i'\}_c - \dfrac{i}{i'y}\{i,i'\}_c\,\alpha^{i}_{i} - \dfrac{i-1}{i'y}\{i-1,i'\}_c\,\alpha^{i-1}_{i-1}\,p_i \\
\qquad - \dfrac{i-2}{i'y}\{i-2,i'\}_c\,\alpha^{i-2}_{i-2}\,p_{i-1}p_i - \text{etc.} \\
\qquad - \dfrac{i+1}{i'y}\{i+1,i'\}_c\,\alpha^{i+1}_{i+1}\,q_i - \dfrac{i+2}{i'y}\{i+2,i'\}_c\,\alpha^{i+2}_{i+2}\,q_{i+1}q_i - \text{etc.}, \\
[i,i']_c = - \dfrac{1}{i'y}\{i,i'\}_s + \dfrac{i}{i'y}\{i,i'\}_s\,\alpha^{i}_{i} + \text{etc.} \\
\qquad\qquad + \text{etc.}
\end{cases}
$$

Il faut excepter le cas où $i' = 0$, car alors on a

$$(3)\quad \begin{cases} [1, 0]_s = (1 - \frac{1}{2} e^2) \{1, 0\}_c - \frac{1}{2} e \{2, 0\}_c + (1 - \frac{1}{8} e^2)(1, 0, 0)_s, \\ [2, 0]_s = - \frac{1}{4} e \{1, 0\}_c + \frac{1}{2} \{2, 0\}_c - \frac{1}{4} e \{3, 0\}_c - \frac{5}{8} e\, (1, 0, 0)_s, \\ [3, 0]_s = - \frac{1}{6} e \{2, 0\}_c + \frac{1}{3} \{3, 0\}_c - \frac{1}{6} e \{4, 0\}_c + \frac{1}{8} e^2 (1, 0, 0)_s, \\ [4, 0]_s = - \frac{1}{8} e \{3, 0\}_c + \frac{1}{4} \{4, 0\}_c - \frac{1}{8} e \{5, 0\}_c, \\ \qquad \text{etc.,} \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} [1,0]_c = - \{1, 0\}_s + \frac{1}{2} e \{2, 0\}_s + (1 - \frac{1}{2} e^2)(1, 0, 0)_c - e\,(0, 0, 0)_c, \\ [2,0]_c = \frac{1}{4} e \{1,0\}_s - \frac{1}{2} \{2,0\}_s + \frac{1}{4} e \{3,0\}_s + (\frac{1}{8} e^3 - \frac{5}{8} e)(1, 0, 0)_c + \frac{1}{4} e^2 (0, 0, 0)_c, \\ [3,0]_c = \frac{1}{6} e \{2,0\}_s - \frac{1}{3} \{3,0\}_s + \frac{1}{6} e \{4,0\}_s + \frac{1}{8} e^2 (1, 0, 0)_c, \\ [4,0]_c = \frac{1}{8} e \{3,0\}_s - \frac{1}{4} \{4,0\}_s + \frac{1}{8} e \{5,0\}_s, \\ \qquad \text{etc.,} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Outre ces termes, cette intégration donne dans nz un terme proportionnel au temps, dont le coefficient est

$$n \{0, 0\}_c - \frac{1}{2} ne \{1, 0\}_c ;$$

mais comme, par suite de l'art. 30, b doit être déterminé de telle sorte que ce terme s'évanouisse, nous aurons

$$\{0, 0\}_c - \frac{1}{2} e \{1, 0\}_c = 0 ;$$

et, en y substituant les valeurs de $\{0, 0\}_c$ et de $\{1, 0\}_c$ données sous la désignation (3) dans l'article qui précède, il viendra

$$(5)\qquad b = \{1, -1, 0\}_c - \frac{1}{2} e \{0, 1, 0\}_c - \frac{1}{2} e \{-1, 2, 0\}_c .$$

34. L'expression de w employée dans l'art. 30 se change facilement en la suivante

$$w = C + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} e\zeta - \frac{1}{2} \int \left(\frac{\overline{dW}}{dv}\right) du.$$

On obtient, comme il suit, le quotient différentiel de W par rapport à v dont on a besoin :

$$\left(\frac{\overline{dW}}{dv}\right) = \Sigma (i, i')_s \sin (iu + i'g') + \Sigma (i, i')_c \cos (iu + i'g')$$
$$- (1, 0, 0)_c\, u \sin u + (1, 0, 0)_s\, u \cos u + \{1, -1, 0\}_s ,$$

où

$$(\text{A})\quad \begin{cases} (i, i')_s = \{-1, i + 1, i'\}_c - \{1, i - 1, i'\}_c , \\ (i, i')_c = - \{-1, i + 1, i'\}_s + \{1, i - 1, i'\}_s ; \end{cases}$$

seulement les trois termes qui ont été écrits à part dans l'expression précédente forment une exception. Maintenant, comme on a

$$
\begin{aligned}
&-(1,0,0)_c \int u \sin u du + (1,0,0)_s \int u \cos u du + \{1,-1,0\}_s \int du \\
&= \{1,-1,0\}_s u + (1,0,0)_c u \cos u + (1,0,0)_s u \sin u \\
&\qquad + (1,0,0)_s \cos u - (1,0,0)_c \sin u,
\end{aligned}
$$

il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
w &= \tfrac{1}{2}\Sigma[(i,i')]_c \cos(iu + i'g') + \tfrac{1}{2}\Sigma[(i,i')]_s \sin(iu + i'g') \\
&+ [(0,0)]_c - \tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_s u - \tfrac{1}{2}(1,0,0)_c u \cos u - \tfrac{1}{2}(1,0,0)_s u \sin u,
\end{aligned}
$$

où

$$
(B)\quad \left\{
\begin{aligned}
[(i,i')]_c &= (i,i')_s \alpha^i_i + (i-1,i')_s \alpha^{i-1}_{i-1} p_i + \text{etc.} \\
&\quad + (i+1,i')_s \alpha^{i+1}_{i+1} q_i \mp \text{etc.}, \\
[(i,i')]_s &= -(i,i')_s \alpha^i_i - \text{etc.} \\
&\quad - \text{etc.},
\end{aligned}
\right.
$$

excepté

$$
(C)\quad \left\{
\begin{aligned}
[(1,0)]_c &= (1,0)_s - (1,0,0)_s, \\
[(2,0)]_c &= \tfrac{1}{2}(2,0)_s, \\
&\text{etc.}, \\
[(1,0)]_s &= -(1,0)_c + (1,0,0)_c, \\
[(2,0)]_s &= -\tfrac{1}{2}(2,0)_c, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Pour trouver la composition du terme constant qui, dans l'expression précédente de w, est désigné par $[(0,0)]_c$, je remarquerai d'abord que ce terme, par suite de la formule générale donnée au commencement de cet article, est égal à $C + \frac{1}{3} b - \frac{1}{2} c\xi$, où, par suite de l'art. **30**, C est le terme constant qui se trouve dans $-\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}$, c'est-à-dire ici, dans $-\frac{1}{2}\overline{W}$; mais, d'après l'art. **32**, $\{0,0\}_c$ est le terme constant contenu dans $\overline{W}$, donc

$$C = -\tfrac{1}{2}\{0,0\}_c = -\tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_c + \tfrac{1}{3} b - \tfrac{1}{2} c\xi.$$

Ainsi, nous obtenons immédiatement

$$(D)\qquad [(0,0)]_c = -\tfrac{1}{2}\{1,-1,0\}_c + \tfrac{2}{3} b - c\xi.$$

Pour faciliter la vérification du calcul numérique dont je dois parler dans

l'article suivant, il est plus avantageux de laisser d'abord dans w, u en dehors des sinus et cosinus, comme je l'ai fait dans l'expression ci-dessus. On élimine ensuite u au moyen de l'équation $u = nt + e \sin u$; de cette manière on a

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \quad -\tfrac{1}{2}\{1, -1, 0\}_s u - \tfrac{1}{2}(1, 0, 0)_c u \cos u - \tfrac{1}{2}(1, 0, 0)_s u \sin u \\ = -\tfrac{1}{2} n \{1, -1, 0\}_s t - \tfrac{1}{2} n (1, 0, 0)_c t \cos u - \tfrac{1}{2} n (1, 0, 0)_s t \sin u \\ -\tfrac{1}{4} e (1,0,0)_s - \tfrac{1}{2} e \{1, -1, 0\}_s \sin u + \tfrac{1}{4} e (1,0,0)_s \cos 2u - \tfrac{1}{4} e (1,0,0)_c \sin 2u, \end{array} \right.$$

et ces termes devront être substitués à la place des trois autres. Si l'on aimait mieux faire cette réduction en même temps que l'intégration, on obtiendrait

$$\begin{aligned} w = & \tfrac{1}{2}\Sigma [(i, i')]'_c \cos(iu + i'g') + \tfrac{1}{2}\Sigma [(i, i')]'_s \sin(iu + i'g') \\ & + [(0, 0)]'_c - \tfrac{1}{2} n \{1, -1, 0\}_s t - \tfrac{1}{2} n (1, 0, 0)_c t \cos u - \tfrac{1}{2} n (1, 0, 0)_s t \sin u, \end{aligned}$$

où

$$[(i, i')]'_c = [(i, i')]_c, \qquad [(i, i')]'_s = [(i, i')]_s,$$

excepté

$$\begin{aligned} & [(0,\ 0)]'_c = -\tfrac{1}{2}\{1, -1, 0\}_s - \tfrac{1}{4} e (1, 0, 0)_s + \tfrac{3}{4} b - c\xi, \\ & [(1,\ 0)]'_c = (1, 0)_s - (1, 0, 0)_s, \\ & [(2,\ 0)]'_c = \tfrac{1}{2}(2, 0)_s + \tfrac{1}{2} e (1, 0, 0)_s, \\ & [(3,\ 0)]'_c = \tfrac{1}{3}(3, 0)_s, \\ & \qquad\qquad \text{etc.}, \\ & [(1,\ 0)]'_s = -(1, 0)_c + (1, 0, 0)_c - e\{1, -1, 0\}_s, \\ & [(2,\ 0)]'_s = -\tfrac{1}{2}(2, 0)_c - \tfrac{3}{2} e (1, 0, 0)_c, \\ & [(3,\ 0)]'_s = -\tfrac{1}{3}(3, 0)_c, \\ & \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

58. Afin de soumettre à un contrôle les calculs indiqués dans ce qui précède, on se servira de l'équation

$$S + \varepsilon = \tfrac{1}{2} b - e\xi + \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} \int \left(\frac{d\Omega}{dv_1}\right) dt,$$

où v_1 désigne la longitude de la comète dans son orbite, et le quotient différentiel de Ω peut être changé en anomalie vraie. On a déjà remarqué, dans l'art. 53, qu'en changeant v en u on obtient la différentielle de l'équation qui

précède au moyen de la quantité Tdt. Posons donc

$$\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)dt=\Sigma\left((i,i')\right)_s \sin(iu+i'g')\,du+\Sigma\left((i,i')\right)_c \cos(iu+i'g')\,du;$$

on a ainsi

$$\left((i,\ i')\right)_s = (0,\ i,\ i')_s + (-1,\ i+1,\ i')_s + (1,\ i-1,\ i')_s,$$
$$\left((i,\ i')\right)_c = (0,\ i,\ i')_c + (-1,\ i+1,\ i')_c + (1,\ i-1,\ i')_c,$$

où $(0, i, i)_s$, etc., ont la même signification que dans l'art. 82; ce sont les coefficients du développement de Tdt. Nous arrivons ainsi, par l'intégration, à

$$S+\varepsilon=\Sigma\left\{(i,i')\right\}_c\cos(iu+i'g')+\Sigma\left\{(i,i')\right\}_s\sin(iu+i'g')$$
$$+\tfrac{1}{2}b-c\xi+\left((0,0)\right)_c u,$$

où les coefficients $\left\{(i,i')\right\}_c$ et $\left\{(i,i')\right\}_s$ résultent de la multiplication des coefficients $\left((i,i')\right)_s$ et $\left((i,i')\right)_c$ par les facteurs d'intégration, en suivant la méthode qui a été expliquée plusieurs fois dans ce qui précède; il est donc inutile de la répéter ici. D'un autre côté, nous avons l'équation

$$S+\varepsilon=\frac{d\delta z}{dt}+2w=\overline{W}+2w,$$

ou bien, en substituant les coefficients de $\overline{W}$ et de w développés précédemment,

$$S+\varepsilon=\Sigma\left\{\left\{i,i'\right\}_c+[(i,i')]_c\right\}\cos(iu+i'g')+\Sigma\left\{\left\{i,i'\right\}_s+[(i,i')]_s\right\}\sin(iu+i'g')$$
$$+\left\{\left\{0,0\right\}_c+2\,[(0,0)]_c\right\}+\left\{(0,\ 0,\ 0)_c-\left\{1,\ -1,\ 0\right\}_s\right\}u.$$

En comparant cette expression de $S+\varepsilon$ avec la précédente, on en tire les équations de condition suivantes :

$$(\mathrm{F})\qquad\left\{\begin{array}{l}\left\{i,\ i'\right\}_c+[(i,\ i')]_c-\left\{(i,\ i')\right\}_c=0,\\ \left\{i,\ i'\right\}_s+[(i,\ i')]_s-\left\{(i,\ i')\right\}_s=0,\\ (0,\ 0,\ 0)_c-\left\{1,\ -1,\ 0\right\}_s-\left((0,\ 0)\right)_c=0,\end{array}\right.$$

qui serviront à vérifier l'exactitude du calcul numérique. Il faut remarquer cependant que, comme la différentielle de S a été déduite ici de Tdt, cette vérification ne s'étend qu'aux calculs qui ont rapport à l'intégration, et si l'on a commis quelques fautes en calculant les quotients différentiels de la fonction perturbatrice, on ne pourrait les découvrir de cette manière. J'ai montré,

dans le § II, comment, dans le calcul de ces quotients différentiels, on peut se procurer des équations de condition, au moyen desquelles on peut, sans autre chose, s'assurer de la bonne exécution de ce calcul ; de cette manière, un contrôle ultérieur n'est plus nécessaire. On peut cependant, à l'aide de la quantité $S + \epsilon$, se procurer une vérification en calculant sa différentielle, ou $\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$, en partant des données initiales du problème, d'une manière analogue à celle qui a donné les quotients différentiels relatifs à x et y. Si quelqu'un désire employer ce genre de contrôle, il pourra entreprendre lui-même ce développement en se dirigeant d'après l'analyse du § II.

86. Représentons de la manière suivante les différentielles de p_1 et de q_1 qu'il s'agit de développer d'après l'art. 54 :

$$\frac{1}{\cos i}\, dp_1 = \Sigma ndt\, (i, i')_c \cos(iu + i'g') + \Sigma ndt\, (i, i')_s \sin(iu + i'g'),$$

$$\frac{1}{\cos i}\, dq_1 = \Sigma ndt\, [i, i']_s \sin(iu + i'g') + \Sigma ndt\, [i, i']_c \cos(iu + i'g').$$

En multipliant les coefficients de cette expression par les facteurs correspondants d'intégration, d'après la méthode expliquée au commencement de ce paragraphe, et comme on l'a montré en particulier à l'art. 85, dans l'intégration de $nWdt$, on obtient pour l'intégrale les coefficients que je désignerai respectivement par $\{(i, i')\}_s$, $\{(i, i')\}_c$, $\{[i, i']\}_c$, $\{[i, i']\}_s$, et qui ont, à l'égard de $(i, i')_c$, $(i, i')_s$, etc., les mêmes relations que, dans l'art. 85, les coefficients $[i, i']_s$ et $[i, i']_c$ à l'égard de $\{i, i'\}_c$ et $\{i, i'\}_s$; on obtient ainsi

$$\frac{1}{\cos i}\, \delta p_1 = n\,(0, 0)_c\, t + \Sigma \{(i, i')\}_s \sin(iu + i'g') + \Sigma \{(i, i')\}_c \cos(iu + i'g'),$$

$$\frac{1}{\cos i}\, \delta q_1 = n\,[0, 0]_c\, t + \Sigma \{[i, i']\}_c \cos(iu + i'g') + \Sigma \{[i, i']\}_s \sin(iu + i'g').$$

Ensuite, à l'aide de l'expression donnée à l'art. 31 pour $r\delta s$,

$$(S)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{r}{a\cos i}\,\delta s = {} & en\,(0, 0)_c\, t + n\sqrt{1 - e^2}\,.\,[0, 0]_c\, t \sin u - n\,(0, 0)_c\, t \cos u \\ & + \Sigma \Big\{ \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - e^2}\Big[\{[i-1, i']\}_c - \{[i+1, i']\}_c\Big] + e\,\{(i, i')\}_s \\ & - \tfrac{1}{2}\{(i+1, i')\}_s - \tfrac{1}{2}\{(i-1, i')\}_s \Big\} \sin(iu + i'g') \\ & + \Sigma \Big\{ \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - e^2}\Big[\{[i+1, i']\}_s - \{[i-1, i']\}_s\Big] + e\,\{(i, i')\}_c \\ & - \tfrac{1}{2}\{(i+1, i')\}_c - \tfrac{1}{2}\{(i-1, i')\}_c \Big\} \cos(iu + i'g'). \end{aligned}\right.$$

On peut différer jusqu'à la fin la substitution de la valeur numérique du cosinus de l'inclinaison i du plan de l'orbite de la comète à l'égard du plan fondamental.

87. Pour appliquer les développements de ce paragraphe à notre exemple, il faut avant tout calculer les facteurs d'intégration. Dans ce but, nos données nous fournissent

$$\begin{aligned} \nu &= 0,11226 & \log \lambda_1 &= 8,6759 \\ 2\nu &= 0,22452 & \lambda_2 &= 8,9769 \\ 3\nu &= 0,33678 & \lambda_3 &= 9,1530 \\ 4\nu &= 0,44904 & \lambda_4 &= 9,2780 \\ 5\nu &= 0,56130 & \lambda_5 &= 9,3749 \\ 6\nu &= 0,67356 & \lambda_6 &= 9,4541 \end{aligned}$$

où, conformément aux art. **38** et **40**, $\nu = \frac{n'}{n}$ et $\lambda_i = \frac{1}{2} ei'\nu$. Dans ces articles, cette dernière quantité était désignée par λ sans indice; mais ici, pour en distinguer les différentes valeurs numériques les unes des autres, je lui ai assigné un indice qui, du reste, n'a aucune influence sur l'emploi de cette quantité dans le calcul des facteurs d'intégration. Comme, dans notre exemple, λ est une quantité très-petite, le calcul des facteurs d'intégration et de leurs rapports pourra s'exécuter de la manière la plus commode par la méthode donnée à l'art. **42**; on obtient ainsi les valeurs numériques suivantes :

i.	$i'=1.$			i.	$i'=2.$		
	Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.		Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.
				— 5	9,3214n	8,2981n	8,2980n
— 4	9,4104n	8,0863n	8,0862n	— 4	9,4237n	8,4003n	8,4002n
— 3	9,5397n	8,2155n	8,2154n	— 3	9,5578n	8,5344n	8,5339n
— 2	9,7247n	8,4004n	8,4001n	— 2	9,7543n	8,7304n	8,7286n
— 1	0,0425n	8,7179n	8,7281n	— 1	0,0954n	9,0948n	9,0901n
0	0,9477	9,6333	9,6158	0	0,6404	9,6402	9,6037
1	9,9620	9,6300	8,6373	1	9,9273	8,8904	8,9026
2	9,6759	8,3554	8,3556	2	9,6548	8,6301	8,6311
3	9,5072	8,1829	8,1830	3	9,4924	8,4687	8,4689
4	9,3861	8,0619	8,0619	4	9,3747	8,3513	8,3514

i.	$i'=3.$			i.	$i'=4.$		
	Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.		Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.
— 5	9,3322n	8,4848n	8,4846n	— 5	9,3434n	8,6209n	8,6205n
— 4	9,4376n	8,5900n	8,5896n	— 4	9,4523n	8,7294n	8,7287n
— 3	9,5776n	8,7297n	8,7285n	— 3	9,5991n	8,8754n	8,8730n
— 2	9,7885n	8,9395n	8,9343n	— 2	9,8297n	9,1036n	9,0913n
— 1	0,1463n	9,2920n	9,3394n	— 1	0,2129n	9,4747n	9,5557n
0	0,4526	9,6458	9,5873	0	0,3078	9,6507	9,5643
1	9,8952	9,0295	9,0449	1	9,8653	9,1213	9,1382
2	9,6355	8,7855	8,7871	2	9,6175	8,8908	8,8936
3	9,4785	8,6303	8,6309	3	9,4652	8,7414	8,7423
4	9,3638	8,5162	8,5164	4	9,3534	8,6304	8,6308

i.	$i'=5.$			i.	$i'=6.$		
	Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i		Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.
— 5	9,3553n	8,7292n	8,7287n	— 5	9,3679n	8,8205n	8,8196n
— 4	9,4681n	8,8414n	8,8400n	— 4	9,4854n	8,9369n	8,9347n
— 3	9,6232n	8,9953n	8,9906n	— 3	9,6513n	9,1008n	9,0941n
— 2	9,8817n	9,2490n	9,2239n	— 2	9,9535n	9,3939n	9,3431n
— 1	0,2957n	9,6378n	9,7739n	— 1	0,4053n	9,7952n	0,0330n
0	0,1768	9,6550	9,5284	0	0,0310	9,6587	9,4626
1	9,8359	9,1877	9,2043	1	9,8068	9,2384	9,2524
2	9,6005	8,9692	8,9729	2	9,5848	9,0308	9,0353
3	9,4526	8,8249	8,8261	3	9,4406	8,8910	8,8926

Les facteurs d'intégration plus grands que ceux-ci ne commencent à se manifester, dans les perturbations de la comète de Encke par Saturne, que pour $i' = 9$. J'ai réuni les plus considérables dans la petite Table suivante :

i.	Log α_i^i.	Log p_i.	Log q_i.
-3	9,215	8,849	9,345n
-2	1,145	1,275n	9,678n
-1	1,821	0,355n	0,300
0	1,188	9,668	0,431
1	0,098	9,340	9,696

mais, pour cette valeur de i', les termes mêmes des différentielles sont si petits qu'il n'en peut résulter aucune perturbation sensible.

88. Si, conformément aux indications de l'équation (1) de l'art. 82, on multiplie les coefficients de l'expression donnée pour Tdt à l'art. 38 par ces facteurs d'intégration, on obtiendra les valeurs suivantes pour W :

W.

x, i, i'.	$xv + iu + i'g'$ Cos	$xv + iu + i'g'$ Sin
0, 0, 0	− b	
0, 0, 0	+0"0315u	
1, −1, 0	−1,067	+0",0630
0, 1, 0	+0,772	−0,061
−1, 2, 0	+0,146	+0,018
1, 0, 0	+0,0750u	+1,1544u
	+0,918	−0,043
0, 2, 0	−0,210	+0,018
−1, 3, 0	+0,006	−0,004
1, 1, 0	+0,482	−0,049
	+0,278	−0,035
0, 3, 0	+0,018	−0,002
−1, 4, 0	0,000	0,000
1, 2, 0	−0,039	+0,006
	−0,021	+0,004
0, 4, 0	−0,002	0,000
−1, 5, 0	0,000	0,000
1, 3, 0	+0,004	0,000
	+0,002	0,000
0, −4, 1	+0,001	+0,007
−1, −3, 1	−0,002	−0,015
1, −5, 1	0,000	0,000
	−0,001	−0,008
0, −3, 1	−0,010	−0,068
−1, −2, 1	+0,018	+0,142
1, −4, 1	+0,001	+0,008
	+0,009	+0,082
0, −2, 1	+0,020	+0,298
−1, −1, 1	−0,032	−0,312
1, −3, 1	+0,004	−0,041
	−0,008	−0,055
0, −1, 1	−0,008	−0,597
−1, 0, 1	−0,643	−9,160
1, −2, 1	−0,018	+0,085
	−0,669	−9,672

x, i, i'.	$xv + iu + i'g'$ Cos	$xv + iu + i'g'$ Sin
0, 0, 1	− 0",330	− 4",228
−1, 1, 1	+ 0,049	+ 0,318
1, −1, 1	+ 0,021	− 0,091
	− 0,260	− 4,001
0, 1, 1	+ 0,024	− 0,096
−1, 2, 1	− 0,031	− 0,148
1, 0, 1	− 0,117	− 0,228
	− 0,124	− 0,472
0, 2, 1	− 0,002	+ 0,006
−1, 3, 1	+ 0,007	+ 0,020
1, 1, 1	− 0,003	− 0,005
	+ 0,002	+ 0,021
0, −4, 2	+ 0,018	− 0,011
−1, −3, 2	− 0,047	+ 0,029
1, −5, 2	− 0,002	+ 0,001
	− 0,031	+ 0,019
0, −3, 2	− 0,258	+ 0,201
−1, −2, 2	+ 0,652	− 0,529
1, −4, 2	+ 0,024	− 0,013
	+ 0,418	− 0,341
0, −2, 2	+ 1,842	− 1,634
−1, −1, 2	− 2,049	+ 1,775
1, −3, 2	− 0,395	+ 0,345
	− 0,602	+ 0,485
0, −1, 2	− 3,942	+ 3,574
−1, 0, 2	−23,619	+21,213
1, −2, 2	+ 1,406	− 1,267
	−26,155	+23,520
0, 0, 2	−14,484	+12,891
−1, 1, 2	+ 0,792	− 0,679
1, −1, 2	− 2,369	+ 2,128
	−16,061	+14,340
0, 1, 2	− 0,287	+ 0,264
−1, 2, 2	− 0,393	+ 0,339
1, 0, 2	− 7,622	+ 6,887
	− 8,302	+ 7,490

x, i, i'.	$xv + iu + i'g'$ Cos	$xv + iu + i'g'$ Sin
0, 2, 2	−0",115	+0",107
−1, 3, 2	+0,023	−0,019
1, 1, 2	−0,204	+0,174
	−0,296	+0,262
0, 3, 2	+0,007	−0,006
−1, 4, 2	−0,001	0,000
1, 2, 2	−0,040	+0,035
	−0,034	+0,029
0, −4, 3	−0,048	−0,038
−1, −3, 3	+0,132	+0,097
1, −5, 3	+0,004	+0,004
	+0,088	+0,063
0, −3, 3	+0,360	+0,281
−1, −2, 3	−0,806	−0,652
1, −4, 3	−0,081	−0,055
	−0,527	−0,425
0, −2, 3	−1,057	−1,146
−1, −1, 3	+1,711	+1,563
1, −3, 3	+0,305	+0,287
	+0,959	+0,704
0, −1, 3	+1,647	+2,131
−1, 0, 3	+5,736	+7,401
1, −2, 3	−0,694	−0,813
	+6,689	+8,719
0, 1, 3	+3,492	+4,699
−1, 1, 3	−0,138	−0,246
1, −1, 3	+1,006	+1,297
	+4,360	+5,750
0, 1, 3	+0,069	+0,129
−1, 2, 3	+0,160	+0,182
1, 0, 3	+1,935	+2,598
	+2,164	+2,909
0, 2, 3	+0,056	+0,068
−1, 3, 3	−0,021	−0,017
1, 1, 3	+0,060	+0,089
	+0,095	+0,140

W.

x, i, i'.	xv + iu + i'g' Cos	xv + iu + i'g' Sin
0, 3, 3	−0″,006	−0″,005
−1, 4, 3	+0,002	+0,001
1, 2, 3	+0,025	+0,029
	+0,021	+0,025
0, −5, 4	+0,003	−0,010
−1, −4, 4	−0,008	+0,027
1, −6, 4	0,000	0,000
	−0,005	+0,017
0, −4, 4	−0,026	+0,080
−1, −3, 4	+0,067	−0,173
1, −5, 4	+0,004	−0,017
	+0,045	−0,110
0, −3, 4	+0,154	−0,277
−1, −2, 4	−0,364	+0,637
1, −4, 4	−0,035	+0,078
	−0,245	+0,438
0, −2, 4	−0,487	+0,642
−1, −1, 4	+0,776	−1,155
1, −3, 4	+0,133	−0,202
	+0,422	−0,715
0, −1, 4	+0,821	−0,956
−1, 0, 4	+1,877	−2,191
1, −2, 4	−0,328	+0,408
	+2,370	−2,739
0, 0, 4	+1,222	−1,364
−1, 1, 4	−0,035	+0,018
1, −1, 4	+0,507	−0,579
	+1,694	−1,925
0, 1, 4	+0,051	−0,042
−1, 2, 4	+0,058	−0,078
1, 0, 4	+0,681	−0,775
	+0,790	−0,895
0, 2, 4	+0,023	−0,032
−1, 3, 4	[illegible],007	+0,013

x, i, i'.	xv + iu + i'g' Cos	xv + iu + i'g' Sin
1, 1, 4	+0″,036	−0″,029
	+0,052	−0,048
0, −5, 5	−0,011	−0,001
−1, −4, 5	+0,028	+0,003
1, −6, 5	+0,003	0,000
	+0,020	+0,002
0, −4, 5	+0,058	+0,014
−1, −3, 5	−0,125	−0,039
1, −5, 5	−0,018	−0,002
	−0,085	−0,027
0, −3, 5	−0,156	−0,037
−1, −2, 5	+0,382	+0,180
1, −4, 5	+0,048	+0,017
	+0,274	+0,124
0, −2, 5	+0,344	+0,211
−1, −1, 5	−0,665	−0,366
1, −3, 5	−0,109	−0,056
	−0,430	−0,211
0, −1, 5	−0,521	−0,355
−1, 0, 5	−0,852	−0,570
1, −2, 5	+0,223	+0,136
	−1,150	−0,789
0, 0, 5	−0,553	−0,384
−1, 1, 5	−0,013	−0,001
1, −1, 5	−0,327	−0,215
	−0,893	−0,600
0, 1, 5	−0,028	−0,022
−1, 2, 5	−0,034	−0,021
1, 0, 5	−0,329	−0,222
	−0,391	−0,265
0, 2, 5	−0,018	−0,008
−1, 3, 5	+0,008	+0,004
1, 1, 5	−0,017	−0,017
	−0,027	−0,021

x, i, i'.	xv + iu + i'g' Cos	xv + iu + i'g' Sin
0, −5, 6	+0″,002	+0″,009
−1, −4, 6	−0,004	−0,020
1, −6, 6	−0,001	−0,002
	−0,003	−0,013
0, −4, 6	0,000	−0,033
−1, −3, 6	−0,007	+0,074
1, −5, 6	+0,001	+0,009
	−0,006	+0,050
0, −3, 6	−0,018	+0,079
−1, −2, 6	+0,050	−0,212
1, −4, 6	+0,003	−0,026
	+0,035	−0,159
0, −2, 6	+0,059	−0,171
−1, −1, 6	−0,109	+0,365
1, −3, 6	−0,016	+0,054
	−0,066	+0,248
0, −1, 6	−0,101	+0,266
−1, 0, 6	−0,121	+0,325
1, −2, 6	+0,043	−0,108
	−0,179	+0,483
0, 0, 6	−0,085	+0,214
−1, 1, 6	−0,004	+0,018
1, −1, 6	−0,075	+0,160
	−0,164	+0,392
0, 1, 6	−0,006	+0,019
−1, 2, 6	−0,005	+0,013
1, 0, 6	−0,059	+0,123
	−0,070	+0,155
0, 2, 6	−0,004	+0,005
−1, 3, 6	+0,001	−0,001
1, 1, 6	−0,003	+0,011
	−0,006	+0,015

Les nombres qui se trouvent à la quatrième ligne, dans chaque division de cette Table, sont la somme des trois précédents, et par conséquent ce sont les coefficients de $\overline{W}$. Les règles données à l'art. **30** pour la détermination des quantités ξ et η ne peuvent s'appliquer que quand on a égard à toutes les planètes qui exercent quelque influence sur le mouvement de la comète; j'ai donc fait ici $\eta = \xi = 0$; mais, dans tous les cas, b doit être déterminé comme on l'a expliqué dans ce qui précède, c'est-à-dire de manière que dans les perturbations de la longitude moyenne, on ne rencontre point de termes proportionnels au temps.

Avant d'aller plus loin, je vais, comme exemple de la méthode d'intégration donnée ici pour la première fois, présenter le calcul de la partie de W qui est multipliée par sin $(-v + iu + 2g')$. Il se dispose comme il suit :

	−1,−4,2	−1,−3,2	−1,−2,2	−1,−1,2	−1, 0, 2	−1,1,2	−1,2,2	−1,3,2	−1,4,2
	7,699	8,477n	9,884	0,5234n	0,66839	0,4589n	9,914	8,964n	7,602
α^{-4}_{-4}, α^{-3}_{-3}	7,123n	8,035	9,638n	0,6139	1,30880	0,3862n	9,569	8,456n	6,977
p_{-2}, p_{-1}	"	6,765n	8,703	0,2542	0,1992	9,016 n	8,038	6,807n	"
p_0, p_1	"	"	8,343	9,145	8,829	7,485 n	"	"	"
p_1, p_2	"	"	7,233	7,775	7,298	"	"	"	"
q_{-4}, q_{-3}	"	"	8,172	9,343n	0,2989n	9,9899n	8,472	7,087n	"
q_{-3}, q_{-2}	"	"	"	7,877	9,128	9,080	8,076	"	"
q_{-2}, q_{-1}	"	"	"	"	7,631n	7,809n	7,166n	"	"
	− 0″,001	+ 0″,011	− 0″,435	+ 4″,111	+20″,361	−2″,433	+0″,371	−0″,029	+0″,001
	"	"	− 0,001	+ 0,050	+ 1,795	+1,582	−0,104	+0,011	−0,001
	"	"	"	"	+ 0,022	+0,140	+0,067	−0,003	"
	"	"	"	"	"	+0,002	+0,006	+0,002	"
	"	+ 0,015	− 0,221	− 2,505	− 0,977	+0,030	−0,001	"	"
	"	+ 0,008	+ 0,134	+ 0,120	+ 0,012	"	"	"	"
	"	− 0,005	− 0,006	− 0,001	"	"	"	"	"
	− 0,001	+ 0,029	− 0,529	+ 1,775	+21,213	−0,679	+0,339	−0,019	0,000

La première ligne de ce calcul contient les indices des arguments, et la seconde les logarithmes des coefficients correspondants de $\frac{\mathrm{T}dt}{du}$. Les logarithmes des facteurs d'intégration ont été inscrits sur le bord inférieur d'une bande de papier, et, en la disposant au-dessus des logarithmes de la seconde ligne, on a fait les sommes d'où résultent les sept lignes suivantes. La première contient les logarithmes des produits respectifs des coefficients par α^{i}_{i}, pour le

cas de $i' = 2$, comme on l'indique à gauche où l'on a inséré les deux premiers de ces facteurs; la deuxième, la troisième et la quatrième de ces lignes ont été déduites de celle qui précède immédiatement, en y ajoutant les logarithmes de p_i; la cinquième provient de la première; et la sixième ainsi que la septième proviennent de celles qui précèdent immédiatement, en ajoutant les logarithmes de q_i. J'ai indiqué à gauche les facteurs d'intégration appliqués aux deux premiers nombres de chaque ligne; on en conclura facilement les autres.

Les lignes suivantes contiennent les nombres correspondants aux logarithmes, chacun dans la colonne qui lui appartient, et la dernière ligne est la somme de chaque colonne; elle donne les coefficients de l'intégrale.

89. Maintenant, si l'on applique aux coefficients numériques de la valeur de W calculés dans l'article précédent, les calculs développés à l'art. 85, et dont les résultats sont contenus dans les expressions désignées par (1), (2), (3), (4), il en résulte l'expression suivante pour les perturbations de la longitude moyenne ou nz:

$n\delta z$.		
i, i'.	$(iu + i'g')$ Sin	$(iu + i'g')$ Cos
1,0	+ 1″,52	+ 0″,07
1,0	+ 0,0916t	− 2,1928t
2,0	− 0,66	− 0,02
2,0	− 0,0301t	+ 0,4630t
3,0	+ 0,05	+ 0,01
− 3,1	0,00	0,00
− 2,1	− 0,16	+ 2,34
− 1,1	+ 0,59	− 8,74
0,1	+ 0,93	− 6,77
1,1	+ 0,02	− 1,37
2,1	+ 0,02	− 0,14
− 4,2	+ 0,05	+ 0,04
− 3,2	0,00	+ 0,03
− 2,2	− 7,13	− 6,45
− 1,2	+25,10	+22,59

$n\delta z$.		
i, i'.	$(iu + i'g')$ Sin	$(iu + i'g')$ Cos
0,2	+ 3″,55	+ 3″,72
1,2	− 0,74	− 0,69
2,2	+ 1,42	+ 1,30
3,2	+ 0,08	+ 0,07
− 4,3	− 0,11	+ 0,08
− 3,3	+ 0,29	− 0,16
− 2,3	+ 1,54	− 2,46
− 1,3	− 6,81	+ 9,28
0,3	− 1,01	+ 1,38
1,3	+ 0,06	− 0,12
2,3	− 0,35	+ 0,46
3,3	− 0,02	+ 0,04
− 4,4	− 0,06	− 0,11
− 3,4	+ 0,12	+ 0,29
− 2,4	+ 0,64	+ 0,50
− 1,4	− 2,81	− 2,98

$n\delta z$.		
i, i'.	$(iu + i'g')$ Sin	$(iu + i'g')$ Cos
− 0,4	− 0″,40	− 0″,39
1,4	− 0,04	− 0,02
2,4	− 0,11	− 0,14
− 4,5	+ 0,08	− 0,03
− 3,5	− 0,18	+ 0,08
− 2,5	− 0,15	+ 0,22
− 1,5	+ 1,34	− 1,03
0,5	+ 0,15	− 0,18
1,5	+ 0,03	− 0,02
2,5	+ 0,06	− 0,04
− 4,6	+ 0,01	+ 0,06
− 3,6	− 0,02	− 0,12
− 2,6	− 0,05	− 0,01
− 1,6	+ 0,26	+ 0,59
0,6	+ 0,04	+ 0,08
1,6	+ 0,01	+ 0,03

En même temps on obtient, à l'aide de l'équation (5) de l'art. 53,

$$b = -1'',455.$$

60. Avec la valeur de W obtenue dans l'art. 58, et au moyen de l'expression (A) développée à l'art. 54, on obtient le quotient différentiel par rapport à v, et l'on arrive, en y changeant v en u, aux résultats suivants :

$\left(\frac{dW}{dv}\right)$.			$\left(\frac{dW}{dv}\right)$.			$\left(\frac{dW}{dv}\right)$.		
	$(iu+i'g')$			$(iu+i'g')$			$(iu+i'g')$	
i, i'.	Sin	Cos	i, i'.	Sin	Cos	i, i'.	Sin	Cos
0,0		+ 0",0630	2,2	+ 0",227	+ 0",193	−5,5	+ 0",025	− 0",003
1,0	+ 0",146	− 0,018	3,2	+ 0,039	+ 0,035	−4,5	− 0,107	+ 0,037
1,0	− 0,0750u	+ 1,1544u	−4,3	+ 0,128	− 0,093	−3,5	+ 0,334	− 0,163
2,0	− 0,476	− 0,045	−3,3	− 0,725	+ 0,597	−2,5	− 0,556	+ 0,310
3,0	+ 0,039	+ 0,006	−2,3	+ 1,406	− 1,276	−1,5	− 1,075	+ 0,706
−4,1	− 0,002	+ 0,015	−1,3	+ 6,430	− 8,214	0,5	+ 0,314	− 0,214
−3,1	+ 0,017	− 0,134	0,3	− 1,144	+ 1,543	1,5	+ 0,295	− 0,201
−2,1	− 0,036	+ 0,271	1,3	− 1,775	+ 2,416	2,5	+ 0,025	− 0,021
−1,1	− 0,625	+ 9,245	2,3	− 0,081	+ 0,106	−5,6	− 0,003	+ 0,018
0,1	+ 0,028	− 0,409	3,3	− 0,023	+ 0,028	−4,6	− 0,008	− 0,065
1,1	+ 0,086	− 0,080	−5,4	− 0,008	− 0,027	−3,6	+ 0,047	+ 0,186
2,1	+ 0,010	− 0,025	−4,4	+ 0,063	+ 0,156	−2,6	− 0,093	− 0,311
−4,2	− 0,045	− 0,028	−3,4	− 0,329	− 0,559	−1,6	− 0,164	− 0,433
−3,2	+ 0,628	+ 0,516	−2,4	+ 0,643	+ 0,953	0,6	+ 0,071	+ 0,142
−2,2	− 1,654	− 1,430	−1,4	+ 2,205	+ 2,599	1,6	+ 0,054	+ 0,110
−1,2	−25,025	−22,480	0,4	− 0,542	− 0,597	2,6	+ 0,004	+ 0,012
0,2	+ 3,161	+ 2,807	1,4	− 0,623	− 0,697			
1,2	+ 7,229	+ 6,548	2,4	− 0,043	− 0,042			

et par suite, au moyen des formules (B), (C), (D) de l'art. 54, on obtient l'expression suivante pour les perturbations du logarithme hyperbolique du rayon vecteur, ou w :

w.			*w*.			*w*.		
i, i'.	$(iu + i'g')$ Cos	Sin	i, i'.	$(iu + i'g')$ Cos	Sin	i, i'.	$(iu + i'g')$ Cos	Sin
0,0	− 0″,44		0,2	+14″,84	−13″,28	0,4	− 1″,41	+ 1″,61
0,0	− 0,0315*u*		1,2	+ 4,13	− 3,73	1,4	− 0,41	+ 0,46
1,0	− 0,50	+ 0″,05	2,2	+ 0,23	− 0,21	2,4	− 0,05	+ 0,05
1,0	− 0,0375*u*	− 0,5772*u*	3,2	+ 0,01	− 0,01			
2,0	− 0,12	+ 0,01				− 4,5	+ 0,02	+ 0,01
3,0	+ 0,01	0,00	− 4,3	− 0,03	− 0,02	− 3,5	− 0,08	− 0,04
			− 3,3	+ 0,14	+ 0,11	− 2,5	+ 0,07	+ 0,03
− 3,1	− 0,01	− 0,02	− 2,3	− 0,10	+ 0,05	− 1,5	+ 0,81	+ 0,54
− 2,1	0,00	− 0,06	− 1,3	− 4,00	− 5,12	0,5	+ 0,71	+ 0,48
− 1,1	+ 0,34	+ 5,00	0,3	− 3,84	− 5,06	1,5	+ 0,22	+ 0,14
0,1	+ 0,29	+ 4,03	1,3	− 1,08	− 1,46	2,5	+ 0,03	+ 0,02
1,1	+ 0,05	+ 0,21	2,3	− 0,09	− 0,12			
2,1	0,00	+ 0,01	3,3	− 0,01	− 0,01	− 4,6	0,00	− 0,02
						− 3,6	− 0,01	+ 0,04
− 4,2	+ 0,01	− 0,01	− 4,4	− 0,02	+ 0,03	− 2,6	+ 0,01	− 0,05
− 3,2	− 0,10	+ 0,09	− 3,4	+ 0,07	− 0,12	− 1,6	+ 0,14	− 0,37
− 2,2	− 0,30	+ 0,29	− 2,4	− 0,04	+ 0,11	0,6	+ 0,13	− 0,29
− 1,2	+14,35	−12,91	− 1,4	− 1,51	+ 1,77	1,6	+ 0,04	− 0,09

L'équation (E) de l'art. 84 donne

$$\begin{aligned} -\ 0'',0315\,u - 0'',0375\,u\cos u - 0'',5772\,u\sin u \\ = -\ 0'',24 \\ -\ 0'',0599\,t \\ -\ 0'',03\sin u \\ -\ 0'',0713\,t\cos u - 1'',0965\,t\sin u \\ +\ 0'',024\cos 2u - 0'',02\sin 2u, \end{aligned}$$

valeur qui doit être substituée dans l'expression précédente de *w*, et alors la première subdivision se change en la suivante :

w.		
i, i'.	$(iu + i'g')$ Cos	Sin
0, 0	− 0″,68	
0, 0	− 0,0599*t*	
1, 0	− 0,50	+ 0″,02
1, 0	− 0,0713*t*	− 1,0965*t*
2, 0	+ 0,12	− 0,01
3, 0	+ 0,01	0,00

61. Pour servir de vérification, conformément aux indications de l'art. 55, j'ai calculé la quantité S + ε; les nombres inscrits dans les colonnes intitulées *Diff.* sont les résultats des équations de condition (F) de l'art. 55.

S + ε.				
	$(iu + i'g')$			
i, i'.	Cos	Diff.	Sin	Diff.
0,0	− 0″,0315u	0″,00		
1,0	− 0,09	0,00	+ 0″,05	0″,00
2,0	+ 0,04	0,00	− 0,01	0,00
3,0	− 0,01	0,00	0,00	0,00
− 3,1	0,00	0,00	+ 0,04	0,00
− 2,1	− 0,01	0,00	− 0,15	+ 0,02
− 1,1	0,00	+ 0,01	+ 0,33	0,00
0,1	+ 0,32	0,00	+ 4,03	− 0,02
1,1	− 0,03	− 0,02	− 0,06	− 0,01
2,1	+ 0,01	0,00	+ 0,03	0,00
− 4,2	− 0,01	0,00	0,00	− 0,01
− 3,2	+ 0,22	0,00	− 0,18	− 0,01
− 2,2	− 1,20	+ 0,01	+ 1,06	0,00
− 1,2	+ 2,55	+ 0,01	− 2,29	+ 0,01
0,2	+ 13,62	0,00	− 12,21	0,00
1,2	− 0,07	+ 0,02	+ 0,06	+ 0,02
2,2	+ 0,17	− 0,02	− 0,15	0,00
3,2	− 0,01	0,00	+ 0,01	0,00
− 4,3	+ 0,04	0,00	+ 0,03	+ 0,01
− 3,3	− 0,25	0,00	− 0,21	0,00
− 2,3	+ 0,77	0,00	+ 0,79	− 0,01
− 1,3	− 1,31	0,00	− 1,51	0,00
0,3	− 3,31	0,00	− 4,39	− 0,02

S + ε.				
	$(iu + i'g')$			
i, i'.	Cos	Diff.	Sin	Diff.
1,3	0″,00	0″,00	0″,00	+ 0″,01
2,3	− 0,07	− 0,01	− 0,08	+ 0,01
3,3	+ 0,01	0,00	+ 0,01	− 0,01
− 4,4	+ 0,01	+ 0,01	− 0,05	+ 0,01
− 3,4	− 0,11	− 0,01	+ 0,20	− 0,01
− 2,4	+ 0,36	− 0,02	− 0,50	+ 0,01
− 1,4	− 0,63	− 0,01	+ 0,81	+ 0,01
0,4	− 1,13	0,00	+ 1,29	0,00
1,4	− 0,01	− 0,01	+ 0,01	0,00
2,4	− 0,03	− 0,01	+ 0,04	0,00
− 4,5	− 0,04	− 0,01	− 0,01	+ 0,01
− 3,5	+ 0,12	0,00	+ 0,05	0,00
− 2,5	− 0,28	− 0,01	− 0,16	0,00
− 1,5	+ 0,45	+ 0,02	+ 0,27	− 0,01
0,5	+ 0,52	+ 0,01	+ 0,34	− 0,01
1,5	+ 0,02	+ 0,02	+ 0,01	0,00
2,5	+ 0,01	+ 0,01	+ 0,01	0,00
− 4,6	0,00	0,00	+ 0,02	0,00
− 3,6	+ 0,01	+ 0,01	− 0,06	+ 0,02
− 2,6	− 0,04	− 0,01	+ 0,15	0,00
− 1,6	+ 0,08	+ 0,02	− 0,24	+ 0,02
0,6	+ 0,09	+ 0,01	− 0,19	0,00
1,6	+ 0,01	− 0,01	− 0,01	+ 0,01

62. D'après la méthode exposée dans l'art. 56, on tire les intégrales suivantes des valeurs numériques des différentielles de p_1 et de q_1 données à l'art. 56. Il faut ici remarquer que les constantes désignées par (δp_1) et (δq_1) dans l'art. 51 ne peuvent être calculées que quand on a eu égard à toutes les planètes qui excercent une influence sensible sur la comète de Encke, et

que, par conséquent, elles doivent ici être considérées comme nulles, de même que ξ et η.

	$\frac{\partial p_1}{\cos i}$.		$\frac{\partial q_1}{\cos i}$.	
	$(iu + i'g')$		$(iu + i'g')$	
i, i'.	Sin	Cos	Cos	Sin
0, 0		+0″,1658*t*	+0″,4221*t*	
1, 0	+0″,030	+0,061	+0,358	−0″,157
2, 0	−0,041	−0,026	−0,156	+0,078
3, 0	+0,014	+0,005	+0,033	−0,012
−3, 1	−0,003	−0,008	+0,007	−0,028
−2, 1	+0,016	0,000	−0,048	+0,067
−1, 1	−0,036	+0,036	+0,100	−0,102
0, 1	−0,018	+0,486	+2,150	+1,116
1, 1	−0,026	+0,027	−0,080	−0,147
2, 1	+0,012	−0,016	+0,046	+0,063
3, 1	−0,004	+0,005	−0,010	−0,015
−3, 2	−0,011	−0,020	+0,013	−0,039
−2, 2	+0,066	+0,093	−0,155	+0,266
−1, 2	−0,147	−0,190	+0,375	−0,595
0, 2	+0,057	+0,155	+3,196	−4,491
1, 2	−0,081	−0,108	−0,125	+0,149
2, 2	+0,025	+0,031	+0,074	−0,092
3, 2	−0,005	−0,005	−0,010	+0,010

	$\frac{\partial p_1}{\cos i}$.		$\frac{dq_1}{\cos i}$.	
	$(iu + i'g')$		$(iu + i'g')$	
i, i'.	Sin	Cos	Cos	Sin
−3, 3	+0″,009	−0″,010	−0″,057	−0″,023
−2, 3	−0,042	+0,037	+0,218	+0,124
−1, 3	+0,049	−0,068	−0,404	−0,261
0, 3	−0,083	+0,022	−1,291	−1,077
1, 3	+0,029	−0,033	+0,031	+0,043
2, 3	−0,011	+0,011	−0,036	−0,021
−3, 4	+0,004	+0,010	−0,014	+0,043
−2, 4	−0,011	−0,016	+0,052	−0,136
−1, 4	+0,019	+0,016	−0,103	+0,241
0, 4	−0,009	−0,032	−0,239	+0,471
1, 4	+0,007	+0,009	+0,004	−0,005
2, 4	−0,002	−0,005	−0,007	+0,015
−3, 5	−0,003	+0,001	+0,028	+0,007
−2, 5	+0,005	−0,005	−0,082	−0,028
−1, 5	−0,004	+0,004	+0,135	+0,053
0, 5	+0,012	−0,002	+0,170	+0,080
1, 5	−0,002	+0,001	+0,004	−0,001

On obtient ainsi, par l'équation (S) de l'art. 86, les perturbations suivantes de la latitude, multipliées par le rayon vecteur :

i, i'	$\frac{r}{a} \frac{\delta s}{\cos i}$. $(iu + i'g')$ Sin	Cos	i, i'.	$\frac{r}{a} \frac{\delta s}{\cos i}$. $(iu + i'g')$ Sin	Cos	i, i'.	$\frac{r}{a} \frac{\delta s}{\cos i}$. $(iu + i'g')$ Sin	Cos
0, 0		−0″,073	− 3, 2	0″,000	+0″,007	− 3, 4	−0″,005	−0″,020
0, 0		+0,1401 t	− 2, 2	+0,039	+0,034	− 2, 4	+0,001	+0,026
1, 0	+0″,087	+0,086	− 1, 2	−1,084	−1,559	− 1, 4	+0,105	+0,200
1, 0	+0,2260 t	−0,1658 t	0, 2	+0,296	+0,480	0, 4	−0,050	−0,106
2, 0	−0,030	−0,017	1, 2	+0,726	+0,992	1, 4	−0,050	−0,095
3, 0	−0,010	−0,004	2, 2	+0,035	+0,046	2, 4	−0,005	−0,008
			3, 2	+0,003	+0,005			
− 3, 1	+0,002	+0,012				− 3, 5	+0,015	−0,004
− 2, 1	+0,009	−0,033	− 3, 3	−0,029	+0,006	− 2, 5	−0,020	+0,005
− 1, 1	−0,617	+0,067	− 2, 3	+0,027	+0,006	− 1, 5	−0,079	+0,037
0, 1	+0,065	+0,366	− 1, 3	+0,507	−0,410	0, 5	+0,048	−0,019
1, 1	+0,544	−0,494	0, 3	−0,226	+0,152	1, 5	+0,038	−0,020
2, 1	+0,006	+0,004	1, 3	−0,263	+0,238			
3, 1	+0,003	−0,005	2, 3	−0,016	+0,014			

Je n'ai point substitué dans cette expression la valeur numérique du demi-grand axe a, parce qu'on pourra le faire plus facilement lorsque les perturbations auront été réunies en table; c'est aussi pour cette raison, et afin que l'on puisse choisir à son gré le plan fondamental, que j'ai laissé, sous forme d'expression analytique, le cosinus de l'inclinaison de l'orbite de la comète à l'égard de ce plan.

63. Les perturbations qui dépendent des carrés, des produits, etc., des forces perturbatrices peuvent être calculées au moyen des expressions que j'ai données pour cela dans les *Fundamenta nova investigationis*, etc., car elles sont tout à fait indépendantes des excentricités et des inclinaisons. On peut employer ces expressions presque sans y rien changer; mais, avant tout, il faut faire $= 0$ les quantités qui y sont désignées par y, α et ν, car ici on n'a pas besoin de faire disparaître les termes multipliés par le temps. Les autres modifications qui pourraient se présenter sont si faciles, que chacun pourra les exécuter sans mon secours; je les indiquerai, du reste, aussitôt que j'aurai calculé un exemple où elles trouvent leur application.

Les perturbations de la comète de Encke par Saturne, calculées précédemment, n'en fournissent jusqu'ici aucune application, car elles sont si petites, que le carré de *cette* force perturbatrice ne donne lieu à aucun terme sensible.

Le produit de cette force par celle de Jupiter ne donnerait probablement rien de sensible, si ce n'est peut-être quelques termes très-petits dans les variations séculaires. La grande inégalité de Saturne doit, en tout cas, donner les plus grandes perturbations périodiques provenant du produit des masses de Jupiter et de Saturne; et, à cause de la longue période de cette inégalité, on peut y avoir égard avec une exactitude plus que suffisante, en prenant pour g', dans les perturbations calculées précédemment, l'anomalie moyenne corrigée de la grande inégalité de Saturne. Le carré de la masse de Jupiter peut produire un terme sensible, soit dans les variations séculaires, soit dans les perturbations périodiques; le terme le plus considérable dépendant de ce carré dans la différentielle des perturbations de la longitude moyenne est d'environ $2''$: je ne pourrais pas, en ce moment, dire avec précision combien il peut s'agrandir par l'intégration; on peut cependant admettre qu'une augmentation de quinze fois environ est la plus grande possible. Les termes dépendants des carrés,..., etc., des forces perturbatrices, sont en général très-petits, comme on le voit dans les perturbations obtenues au moyen des quadratures mécaniques.

§ V. — *Réunion des perturbations absolues de la comète de Encke, produites par Saturne, et leur comparaison avec les perturbations relatives.*

64. Afin de rendre l'examen plus facile, je vais mettre sous la forme la plus simple et réunir les perturbations produites par Saturne et calculées dans ce qui précède. Je les comparerai ensuite avec quelques-unes des perturbations calculées par Encke au moyen des quadratures mécaniques. La forme des perturbations que nous avons calculées ci-dessus est :

$$s \sin(iu + i'g') + c \cos(iu + i'g'),$$

où s et c sont des coefficients numériques. On les ramène à la forme la plus simple, en posant

$$s = k \cos K,$$
$$c = k \sin K,$$

ou bien

$$s = -k' \sin K',$$
$$c = k' \cos K';$$

la première transformation ramène les deux termes de l'expression ci-dessus au suivant :

$$k \sin(iu + i'g' + K),$$

et la seconde à

$$k' \cos(iu + i'g' + K').$$

On comprend facilement que cette transformation peut aussi s'appliquer aux termes multipliés par le temps. Pour plus de clarté, je répète ici les notations déjà employées, savoir :

g' désigne l'anomalie moyenne de Saturne, à laquelle on peut ajouter sa grande inégalité ;
u . . . . l'anomalie excentrique de la comète ;
t . . . . le temps ; l'unité est l'année julienne ;
$n\delta z$ . . . . les perturbations de la longitude moyenne de la comète ;
ν . . . . les perturbations correspondantes du logarithme hyperbolique du rayon vecteur de la comète ;
$r\delta s$ . . . . les perturbations du sinus de la latitude multipliées par le rayon vecteur ;
i . . . . l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le plan fondamental que l'on a choisi ;
a . . . . le demi-grand axe de l'orbite de la comète.

Faisons subir la transformation indiquée ci-dessus aux perturbations précédemment calculées de la comète de Encke, produites par Saturne ; nous aurons :

$$\begin{aligned}
n\delta z = & \quad 1'',52 \quad \sin(u + 2^\circ,6) \\
& + 2,1947\,t \sin(u + 272^\circ 23' 30'') \\
& + 0,066 \quad \sin(2u + 181^\circ,7) \\
& + 0,4640\,t \sin(2u + 93^\circ 42') \\
& + 0,05 \quad \sin(3u + 11^\circ,3) \\
& + 2,35 \quad \sin(-2u + g' + 93^\circ,9) \\
& + 8,76 \quad \mathrm{siu}(-u + g' + 273^\circ,9) \\
& + 6,83 \quad \sin(g' + 277^\circ,8) \\
& + 1,37 \quad \sin(u + g' + 270^\circ,8) \\
& + 0,14 \quad \sin(2u + g' + 278^\circ,1) \\
& + 0,06 \quad \sin(-4u + 2g' + 38^\circ,7) \\
& + 0,03 \quad \sin(-3u + 2g' + 90^\circ,0) \\
& + 9,62 \quad \sin(-2u + 2g' + 222^\circ,2) \\
& + 33,77 \quad \sin(-u + 2g' + 41^\circ 59') \\
& + 5,14 \quad \sin(2g' + 46^\circ,3) \\
& + 1,01 \quad \sin(u + 2g' + 223^\circ,0) \\
& + 1,92 \quad \sin(2u + 2g' + 42^\circ,5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\ 0'',11 && \sin(\ \ 3u + 2g' + \ 41^\circ,2)\\
&+\ 0\ ,14 && \sin(-4u + 3g' + 143^\circ,9)\\
&+\ 0\ ,33 && \sin(-3u + 3g' + 331^\circ,1)\\
&+\ 2\ ,91 && \sin(-2u + 3g' + 302^\circ,0)\\
&+11\ ,51 && \sin(-\ u + 3g' + 126^\circ 16')\\
&+\ 1\ ,71 && \sin(\qquad 3g' + 126^\circ,2)\\
&+\ 0\ ,13 && \sin(\ \ u + 3g' + 296^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,58 && \sin(\ \ 2u + 3g' + 127^\circ,3)\\
&+\ 0\ ,04 && \sin(\ \ 3u + 3g' + 116^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,13 && \sin(-4u + 4g' + 241^\circ,4)\\
&+\ 0\ ,31 && \sin(-3u + 4g' + \ 67^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,81 && \sin(-2u + 4g' + \ 38^\circ,0)\\
&+\ 4\ ,09 && \sin(-\ u + 4g' + 226^\circ,7)\\
&+\ 0\ ,56 && \sin(\qquad 4g' + 224^\circ,3)\\
&+\ 0\ ,04 && \sin(\ \ u + 4g' + 206^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,18 && \sin(\ \ 2u + 4g' + 231^\circ,9)\\
&+\ 0\ ,09 && \sin(-4u + 5g' + 339^\circ,4)\\
&+\ 0\ ,20 && \sin(-3u + 5g' + 156^\circ,0)\\
&+\ 0\ ,27 && \sin(-2u + 5g' + 124^\circ,3)\\
&+\ 1\ ,69 && \sin(-\ u + 5g' + 322^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,23 && \sin(\qquad 5g' + 309^\circ,8)\\
&+\ 0\ ,04 && \sin(\ \ u + 5g' + 326^\circ,3)\\
&+\ 0\ ,07 && \sin(\ \ 2u + 5g' + 326^\circ,3)\\
&+\ 0\ ,06 && \sin(-4u + 6g' + \ 80^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,12 && \sin(-3u + 6g' + 260^\circ,5)\\
&+\ 0\ ,05 && \sin(-2u + 6g' + 191^\circ,4)\\
&+\ 0\ ,64 && \sin(-\ u + 6g' + \ 66^\circ,2)\\
&+\ 0\ ,09 && \sin(\qquad 6g' + \ 63^\circ,4)\\
&+\ 0\ ,03 && \sin(\ \ u + 6g' + \ 71^\circ,5);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega = &-\ 0'',68\\
&-\ 0\ ,0599\,t\\
&+\ 0\ ,50 && \cos(u + 182^\circ,3)\\
&+\ 1\ ,0988\,t && \cos(u + 93^\circ 43' 15'')\\
&\quad\ 0\ ,12 && \cos(2u + 4^\circ,8)\\
&+\ 0\ ,06 && \cos(-2u + g' + 90^\circ,0)\\
&+\ 5\ ,01 && \cos(-\ u + g' + 273^\circ,9)\\
&+\ 4\ ,04 && \cos(\qquad g' + 274^\circ,1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ 0'',22 && \cos(u + g' + 283^\circ,4)\\
&+\ 0,13 && \cos(-3u + 2g' + 222^\circ,0)\\
&+\ 0,42 && \cos(-2u + 2g' + 224^\circ,0)\\
&-19,31 && \cos(-u + 2g' + 41^\circ 57')\\
&+19,91 && \cos(2g' + 41^\circ 49')\\
&+\ 5,58 && \cos(u + 2g' + 42^\circ,1)\\
&+\ 0,31 && \cos(2u + 2g' + 42^\circ,4)\\
&+\ 0,04 && \cos(-4u + 3g' + 146^\circ,3)\\
&+\ 0,18 && \cos(-3u + 3g' + 321^\circ,9)\\
&+\ 0,11 && \cos(-2u + 3g' + 206^\circ,0)\\
&+\ 6,50 && \cos(-u + 3g' + 128^\circ,0)\\
&+\ 6,35 && \cos(3g' + 127^\circ,2)\\
&+\ 1,82 && \cos(u + 3g' + 126^\circ,5)\\
&+\ 0,15 && \cos(2u + 3g' + 126^\circ,9)\\
&+\ 0,04 && \cos(-4u + 4g' + 236^\circ,3)\\
&+\ 0,14 && \cos(-3u + 4g' + 59^\circ,7)\\
&+\ 0,12 && \cos(-2u + 4g' + 250^\circ,0)\\
&+\ 2,33 && \cos(-u + 4g' + 229^\circ,5)\\
&+\ 2,14 && \cos(4g' + 228^\circ,8)\\
&+\ 0,62 && \cos(u + 4g' + 228^\circ,3)\\
&+\ 0,07 && \cos(2u + 4g' + 225^\circ,0)\\
&+\ 0,09 && \cos(-3u + 5g' + 153^\circ,5)\\
&+\ 0,08 && \cos(-2u + 5g' + 336^\circ,8)\\
&+\ 0,97 && \cos(-u + 5g' + 326^\circ,3)\\
&+\ 0,86 && \cos(5g' + 326^\circ,0)\\
&+\ 0,26 && \cos(u + 5g' + 327^\circ,5)\\
&+\ 0,04 && \cos(2u + 5g' + 326^\circ,3)\\
&+\ 0,04 && \cos(-3u + 6g' + 256^\circ,0)\\
&+\ 0,05 && \cos(-2u + 6g' + 78^\circ,7)\\
&+\ 0,40 && \cos(-u + 6g' + 69^\circ,3)\\
&+\ 0,32 && \cos(6g' + 65^\circ,9)\\
&+\ 0,10 && \cos(u + 6g' + 66^\circ,0);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{r\delta s}{a\cos i} = &- 0'',73\\
&+ 0,1401\,t\\
&+ 0,123 \quad \sin(u + 44^\circ,7)\\
&+ 0,2803\,t \ \sin(u + 323^\circ 44')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+\ 0'',034 & \sin(2u + 330^\circ,5) \\
+\ 0\ ,011 & \sin(3u + 201^\circ,8) \\
+\ 0\ ,012 & \sin(-3u + g' + 80^\circ,5) \\
+\ 0\ ,034 & \sin(-2u + g' + 285^\circ,2) \\
+\ 0\ ,620 & \sin(-u + g' + 173^\circ,8) \\
+\ 0\ ,372 & \sin(g' + 79^\circ,9) \\
+\ 0\ ,735 & \sin(u + g' + 317^\circ,7) \\
+\ 0\ ,007 & \sin(2u + g' + 33^\circ,7) \\
+\ 0\ ,007 & \sin(-3u + 2g' + 90^\circ,0) \\
+\ 0\ ,052 & \sin(-2u + 2g' + 41^\circ,0) \\
+\ 1\ ,899 & \sin(-u + 2g' + 235^\circ 11') \\
+\ 0\ ,564 & \sin(2g' + 58^\circ,3) \\
+\ 1\ ,230 & \sin(u + 2g' + 53^\circ 48') \\
+\ 0\ ,058 & \sin(2u + 2g' + 52^\circ,7) \\
+\ 0\ ,030 & \sin(-3u + 3g' + 168^\circ,3) \\
+\ 0\ ,028 & \sin(-2u + 3g' + 12^\circ,6) \\
+\ 0\ ,651 & \sin(-u + 3g' + 321^\circ,0) \\
+\ 0\ ,272 & \sin(3g' + 146^\circ,1) \\
+\ 0\ ,355 & \sin(u + 3g' + 137^\circ,9) \\
+\ 0\ ,021 & \sin(2u + 3g' + 138^\circ,8) \\
+\ 0\ ,021 & \sin(-3u + 4g' + 256^\circ,0) \\
+\ 0\ ,026 & \sin(-2u + 4g' + 87^\circ,8) \\
+\ 0\ ,226 & \sin(-u + 4g' + 62^\circ,3) \\
+\ 0\ ,117 & \sin(4g' + 244^\circ,7) \\
+\ 0\ ,108 & \sin(u + 4g' + 242^\circ,3) \\
+\ 0\ ,016 & \sin(-3u + 5g' + 345^\circ,1) \\
+\ 0\ ,021 & \sin(-2u + 5g' + 166^\circ,0) \\
+\ 0\ ,087 & \sin(-u + 5g' + 155^\circ,0) \\
+\ 0\ ,052 & \sin(5g' + 338^\circ,4) \\
+\ 0\ ,043 & \sin(u + 5g' + 332^\circ,1).
\end{array}
$$

Tel est le résultat que j'ai obtenu pour les perturbations de la comète de Encke produites par Saturne ; c'est le premier exemple de ce genre qui ait été traité (*).

(*) Pour compléter ce résultat, il faudrait encore développer les termes qui dépendent de $9g'$, et qui, par suite de l'art. 87, amènent de grands facteurs d'intégration. Quoique le calcul approximatif que j'ai fait dans ce but ne m'ait rien donné de sen-

63. En comptant les termes des expressions précédentes, on en trouve quarante-six dans les perturbations de la longitude, quarante dans les perturbations du logarithme du rayon vecteur, et trente-quatre dans les perturbations de la latitude. Parmi les coefficients des perturbations de la longitude, en ne comptant pas les termes multipliés par le temps (c'est-à-dire les variations séculaires), on ne trouve que quatorze arguments dont les coefficients sont plus grands qu'une seconde, dix-sept dont les coefficients sont compris entre une seconde et un dixième de seconde, et enfin treize dont les coefficients sont plus petits qu'un dixième de seconde. Pour les perturbations du logarithme du rayon vecteur, on trouve à peu près la même proportion, et dans les perturbations de la latitude, tous les coefficients, à part deux d'entre eux, sont plus petits qu'une seconde. Les perturbations de la longitude, aussi bien que celles du logarithme du rayon vecteur et celles de la latitude, peuvent être disposées chacune en deux Tables. L'une de ces Tables contient les termes multipliés par le temps lui-même, et a pour argument l'anomalie moyenne de la comète; la seconde contient tous les termes purement périodiques, elle a deux arguments, savoir, l'anomalie moyenne de la comète et celle de Saturne. Pour calculer ces Tables, on peut d'abord prendre une série de valeurs uniformément croissantes de l'anomalie moyenne de la comète, et calculer les valeurs correspondantes de l'anomalie excentrique, et l'on substituera successivement celles-ci dans les expressions données ci-dessus avec les valeurs aussi uniformément croissantes de l'anomalie moyenne de Saturne. A l'égard de Saturne, les Tables doivent s'étendre à toute la circonférence; mais à l'égard de la comète, cela n'est point nécessaire, car nous ne pouvons pas l'observer dans tout son cours, et en général il serait sans intérêt pour nous de calculer son lieu pour des points de son orbite où elle est invisible. Ainsi, relativement à la comète, les Tables ne doivent être calculées que jusqu'aux degrés d'anomalie moyenne avant ou après le périhélie, où elle cesse d'être visible pour nous.

Une autre manière de réduire en Table les perturbations précédentes, est celle publiée par Gauss dans la *Correspondance mensuelle*. D'après cette méthode, qui est aussi applicable aux perturbations mises sous la forme que nous leur avons donnée ici, tous les termes qui dépendent du même multiple, soit de l'anomalie moyenne de Saturne, soit de l'anomalie excentrique de la comète, peuvent être réduits en deux Tables avec un argument simple; cet argument est, dans le premier cas, l'anomalie moyenne de la comète, et, dans l'autre, celle de Saturne. Les perturbations ainsi réunies en chacune

sible, cependant il pourrait bien se rencontrer des cas dans lesquels le calcul exact des coefficients de l'argument $-u+9g'$, qui a une longue période, donnerait quelques secondes.

des deux Tables correspondantes, doivent être ramenées à la forme suivante :

$$a \sin(A + i'g'),$$

ou bien, respectivement à

$$a' \sin(A' + iu).$$

Les deux Tables donnent a et A, ou bien respectivement a' et A'; il faudra effectuer la multiplication de ces coefficients par le sinus de l'arc correspondant, lorsqu'on fera usage de ces Tables, pour calculer les lieux de la comète.

66. L'application la plus intéressante que l'on puisse faire ici des expressions données plus haut, est sans contredit leur comparaison avec les perturbations calculées par Encke au moyen des quadratures mécaniques. Encke a fait connaître, dans le vol. IX des *Astr. Nachr.*, n° 211, les perturbations que la comète qui porte son nom avait éprouvées pendant les trois périodes de 1819 à 1829; il y donne les perturbations produites par chaque planète. Ces résultats peuvent nous servir pour notre comparaison. J'ai tiré du Mémoire que je viens de citer les données suivantes, relatives aux perturbations produites par Saturne :

	Δi.	$\Delta\Omega$.	$\Delta\varphi$.	$\Delta\pi$.	$\Delta\mu$.	ΔM.
1819. Jan. 27,25—1822. Mai 24,0	$-15'',141$	$-7'',965$	$-25'',752$	$+4'',471$	$-0'',041944$	$-68'',019$
1819. Jan. 27,25—1825. Sep. 16,3	$-15,985$	$-10,298$	$-27,527$	$-2,188$	$-0,046068$	$-79,219$
1819. Jan. 27,25—1829. Jan. 9,72	$-10,903$	$-10,735$	$-14,950$	$-2,071$	$-0,023442$	$-124,340$

Les temps auxquels correspondent ces perturbations sont si rapprochés des instants du passage par le périhélie, que nous pouvons sans danger, dans notre comparaison, les prendre pour ces instants.

Δi signifie ici les perturbations de l'inclinaison relativement à l'écliptique ;
$\Delta\Omega$ . . . . de la longitude du nœud ;
$\Delta\varphi$ . . . . de l'angle de l'excentricité ;
$\Delta\pi$ . . . . de la longitude du périhélie ;
$\Delta\mu$ . . . . du moyen mouvement diurne ;
ΔM . . . . de l'époque de l'anomalie moyenne.

On trouve facilement qu'à l'époque du passage par le périhélie, les per-

turbations de la longitude moyenne, celles du logarithme hyperbolique du rayon vecteur (exprimé en secondes comme plus haut), et celles de la latitude sont liées aux perturbations ci-dessus de Encke, par les expressions suivantes :

$$n\delta z = \Delta M + \frac{(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}\Delta\pi - 2\sin^2\frac{1}{2}i\frac{(1-e)^2}{\sqrt{1-e^2}}\Delta\Omega,$$

$$w = -\frac{2}{3}\frac{\Delta\mu}{\mu}R - \Delta\varphi\sqrt{\frac{1+e}{1-e}},$$

$$\frac{\delta s}{\cos i} = \sin\omega\,\Delta i - \sin i\cos\omega\,\Delta\Omega,$$

où e désigne l'excentricité, ω la distance du périhélie au nœud ascendant, i l'inclinaison à l'écliptique, et $R = 206265''$.

Au moyen des valeurs numériques

$$\omega = 182^\circ 49',$$
$$e = 0{,}8447,$$
$$i = 13^\circ 21',$$
$$\mu = 1077'',$$

les expressions ci-dessus se changent en les suivantes :

$$n\delta z = \Delta M + 0{,}0448\,\Delta\pi - 0{,}0012\,\Delta\Omega,$$
$$w = -127{,}6\,\Delta\mu - 3{,}448\,\Delta\varphi,$$
$$\frac{\delta s}{\cos i} = -0{,}0491\,\Delta i + 0{,}2306\,\Delta\Omega.$$

On obtient ainsi, pour les trois périodes indiquées plus haut,

$$n\delta z = -67'',81, \quad w = +94'',11, \quad \frac{\delta s}{\cos i} = -1'',09;$$
$$= -79,30, \quad = +100,78, \quad = -1,59;$$
$$= -124,42, \quad = +54,54, \quad = -1,94.$$

Pour comparer ces valeurs de $n\delta z$ avec celles que donnent les perturbations absolues, il faut avoir égard au terme proportionnel au temps que peut avoir produit dans ΔM la double intégration par les quadratures mécaniques, comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction (page 6). Désignons par x la valeur de ce terme pendant une période de la comète ; et remarquons que les trois périodes ci-dessus sont si près d'être égales entre elles, qu'on peut, pour le but que nous nous proposons, supposer une égalité complète ; alors,

au lieu des valeurs qui précèdent, nous aurons pour $n\delta z$ les suivantes :

$$\begin{aligned} n\delta z &= -\ 67'',81 - x, \\ &= -\ 79\ ,30 - 2x, \\ &= -124\ ,42 - 3x, \end{aligned}$$

qui serviront à notre comparaison.

67. A l'instant du passage par le périhélie, on a $u = 0$; substituons cette valeur dans les expressions générales des perturbations absolues données dans les art. 59, 60 et 62. Alors nous obtenons, pour ce même instant,

$$\begin{aligned} n\delta z = +\,0'',06 - 1'',7298t &+ 1'',40 \sin g' - 14'',68 \cos g' \\ &+ 22\ ,33 \sin 2g' + 20\ ,61 \cos 2g' \\ &- 6\ ,41 \sin 3g' + 8\ ,50 \cos 3g' \\ &- 2\ ,66 \sin 4g' - 2\ ,85 \cos 4g' \\ &+ 1\ ,33 \sin 5g' - 1\ ,00 \cos 5g' \\ &+ 0\ ,25 \sin 6g' + 0\ ,63 \cos 6g', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = -\,1'',05 - 0'',1312t &+ 0'',67 \cos g' + 9'',17 \sin g' \\ &+ 33\ ,18 \cos 2g' - 29\ ,77 \sin 2g' \\ &- 9\ ,01 \cos 3g' - 11\ ,63 \sin 3g' \\ &- 3\ ,37 \cos 4g' + 3\ ,91 \sin 4g' \\ &+ 1\ ,78 \cos 5g' + 1\ ,18 \sin 5g' \\ &+ 0\ ,31 \cos 6g' - 0\ ,78 \sin 6g', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta s}{\cos i} = -\,0'',040 - 0'',1658t &+ 0'',059 \sin g' - 0'',530 \cos g' \\ &+ 0\ ,096 \sin 2g' + 0\ ,044 \cos 2g' \\ &+ 0\ ,049 \sin 3g' + 0\ ,041 \cos 3g' \\ &- 0\ ,008 \sin 4g' + 0\ ,018 \cos 4g' \\ &- 0\ ,008 \sin 5g' + 0\ ,001 \cos 5g'. \end{aligned}$$

Pour les quatre époques employées plus haut dans les calculs de Encke, et qui sont relatives au méridien de Paris, j'ai tiré des Tables de Saturne de M. Bouvard

$$\begin{aligned} g' &= 266°\ 8', \\ &= 306\ 42, \\ &= 347.13, \\ &= 27.44. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions précédentes, et en y faisant $t = 0$ pour la première de ces quatre époques, on obtient les perturbations absolues suivantes :

$$n\delta z = -25''77,\quad w = -66''89,\quad \frac{\delta s}{\cos i} = -0''01;$$
$$= -45,70,\quad = +28,92,\quad -1,14;$$
$$= -7,90,\quad = +35,02,\quad -1,64;$$
$$= -5,16,\quad = -12,02,\quad -1,99.$$

En retranchant les premières de ces valeurs de chacune des trois suivantes, nous aurons ainsi, pour les trois périodes adoptées par Encke, les perturbations relatives suivantes :

$$n\delta z = -19''93,\quad w = +95''81,\quad \frac{\delta s}{\cos i} = -1''13;$$
$$= +17,87,\quad = +101,91,\quad = -1,63;$$
$$= +20,61,\quad = +54,87,\quad = -1,98.$$

Nous pouvons immédiatement comparer ces valeurs de w et de $\frac{\delta s}{\cos i}$ avec celles données plus haut qui proviennent des calculs de Encke ; en retranchant celles-ci des précédentes, nous aurons les différences suivantes :

Pour le log. hyperb. du rayon vecteur.	Pour la latitude relativement au plan de l'orbite.
$-1'',70$,	$+0'',04$;
$-1'',13$,	$+0'',04$;
$-0'',33$,	$+0'',04$.

On voit immédiatement que ces différences dans les perturbations de la latitude sont très-petites ; pour pouvoir porter un jugement plus certain sur les autres, je les ramènerai à l'unité ordinaire de la distance au Soleil. Divisons ces différences du logarithme hyperbolique du rayon vecteur de la comète, exprimées en secondes, par le nombre de secondes de l'arc égal au rayon (par $206265''$) ; alors elles seront exprimées par un nombre abstrait. Multiplions-les par le module des logarithmes de Briggs ($\log = 9,638\ldots$) ; on aura alors les différences de ces derniers. Multiplions de nouveau celles-ci par la valeur du rayon vecteur de la comète au périhélie ($= 0,3447$), et nous aurons les différences suivantes, exprimées en unités de la distance de la Terre au Soleil :

Pour le rayon vecteur.
$-0,0000012$;
$-0,0000008$;
$-0,0000002$;

on voit qu'elles sont aussi très-petites.

Pour comparer les valeurs de $n\delta z$, égalons entre elles les valeurs trouvées de part et d'autre dans les deux calculs,

$$- 19'',93 = - 67'',81 - x,$$
$$+ 17'',87 = - 79'',30 - 2x,$$
$$+ 20'',61 = - 124'',42 - 3x,$$

ou bien

$$x = - 47'',88,$$
$$2x = - 97'',17,$$
$$3x = - 145'',03;$$

si nous cherchons la valeur de l'inconnue x qui satisfait le mieux à ces équations, nous aurons

$$x = - 48'',347,$$

et en substituant cette valeur, il en résulte les différences suivantes entre les perturbations en longitude de Encke et les miennes :

$$- 0'',47,$$
$$+ 0'',48,$$
$$- 0'',01.$$

Ces différences, de même que celles trouvées plus haut pour les perturbations du logarithme du rayon vecteur et pour celles de la latitude, sont plus petites que l'on ne s'y serait attendu pour des résultats calculés par des méthodes aussi différentes que celles-ci.

On voit en même temps, par cette comparaison, que le terme proportionnel au temps qui se produit dans les perturbations de l'époque calculées par les quadratures mécaniques, peut devenir en peu de temps sensiblement plus considérable que les perturbations de la longitude qui ont lieu réellement ; en effet, on vient de trouver que le montant de ce terme pour chaque révolution de la comète est $= 48'',3$, tandis que les plus considérables des perturbations absolues de la longitude qui aient lieu réellement dans cette période se montent seulement à $45'',7$.

68. Il résulte des équations (C) de l'art. 51, que les perturbations de la latitude obtenues plus haut pour le moment du passage par le périhélie, ne sont autre chose que les perturbations δp_1 prises avec un signe contraire. Les perturbations δq_1, qui s'évanouissent au périhélie dans les perturbations de la latitude, n'ont pas été comparées, dans ce qui précède, avec les calculs de Encke. Je vais encore faire ici cette comparaison. Dans ce but, si dans l'expression numérique de $\frac{\delta q_1}{\cos i}$ donnée à l'art. 62, on fait l'anomalie excen-

trique $u = o$, on aura, pour l'instant du passage au périhélie,

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = +\, 0'',235 + 0'',4221\,t + 2'',165 \cos g' + 0'',954 \sin g'$$
$$+\, 3'',368 \cos 2g' - 4'',792 \sin 2g'$$
$$-\, 1'',539 \cos 3g' - 1'',215 \sin 3g'$$
$$-\, 0'',307 \cos 4g' + 0'',629 \sin 4g'$$
$$+\, 0'',255 \cos 5g' + 0'',111 \sin 5g' ;$$

et maintenant si l'on y substitue les quatre valeurs de g' trouvées dans l'article précédent, on trouvera, pour les quatre époques indiquées,

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = -\ 7'',00,$$
$$= +\ 8'',35,$$
$$= +\ 8'',92,$$
$$= +\ 3'',95;$$

et ensuite pour chaque période, en soustrayant la première de ces valeurs,

de **1819** à **1822**, $\frac{\delta q_1}{\cos i} = +\ 15'',35;$

1819 à **1823**, $= +\ 15'',92;$

1819 à **1829**, $= +\ 10'',95.$

La formule qui peut servir pour la comparaison avec les perturbations de Encke est

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = \cos \omega \Delta i + \sin i \sin \omega \Delta \Omega ;$$

en y substituant les perturbations de Encke, citées plus haut, elle donnera pour ces mêmes périodes :

$$\frac{\delta q_1}{\cos i} = +\ 15'',21,$$
$$= +\ 16'',09,$$
$$= +\ 11'',01.$$

Les différences avec mes résultats seront ainsi :

$$+\ 0'',14,$$
$$-\ 0'',17,$$
$$-\ 0'',06,$$

qui sont également très-petites, et, comme on voit, dans les limites des différences admissibles.

§ VI. — *Développement des perturbations qui proviennent de la réaction de la planète sur le Soleil.*

69. Les perturbations de la comète qui résultent de la réaction de la planète, et qui sont exprimées dans la fonction perturbatrice par le terme $-\frac{m'}{M+m}\frac{r}{r'^2}H$, se compensent, dans le cas que nous avons considéré jusqu'ici, avec le premier terme du développement des perturbations directes, comme on l'a montré dans le § Ier. Dans le second cas, que je traiterai dans la seconde partie, ce terme se réunit, comme je le ferai voir, avec les deux premiers termes du développement des perturbations directes, de telle manière que ces trois termes réunis sont intégrables par une expression finie.

Quoique pour cette raison, dans ces deux cas, le développement spécial des perturbations qui proviennent de la réaction de la planète sur le Soleil soit superflu, cependant comme il peut arriver que, dans le troisième cas (art. 2), on trouve quelque avantage à les développer séparément, je n'ai pas pu me dispenser de donner ici ce développement. Du reste, il est si simple, lorsque l'on fait usage des principes développés dans ce qui précède, que pour cette seule raison il serait intéressant de le faire connaître.

70. Désignons par Ω^0 la partie de la fonction perturbatrice qui provient de la réaction de la planète sur le Soleil, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\Omega^0 = -\frac{m'}{M+m}\frac{r}{r'^2}H.$$

Dans l'art. 8 on a posé

$$H = A\cos f + B\sin f.$$

Lorsqu'on y introduit les coordonnées employées plus haut,

$$x = \frac{r}{a}\cos f,$$

$$y = \frac{r}{a}\sin f,$$

cette expression devient

$$H = A\frac{a}{r}x + B\frac{a}{r}y;$$

on obtient ainsi

$$\Omega^0 = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}Ax - \frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^2}By,$$

et ensuite, par la différentiation,

$$\left(\frac{d\Omega^\circ}{dx}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^3}A,$$

$$\left(\frac{d\Omega^\circ}{dy}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^3}B;$$

d'où il suit que ces quotients différentiels sont indépendants des coordonnées de la comète. Par suite de l'art. 8, les quantités A et B ont la forme

$$A = \cos^2\tfrac{1}{2}I\cos(f' - 2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\cos(f' + 2N),$$

$$B = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sin(f' - 2K) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\sin(f' + 2N).$$

Posons maintenant

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\cos f' = \sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_i\cos ig',\quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin f' = \sum_{-\infty}^{+\infty}\beta_i\sin ig',$$

et établissons les équations de condition

$$\alpha_i = \alpha_{-i},\quad \beta_i = -\beta_{-i};$$

nous aurons

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 A = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sum_{-\infty}^{+\infty}\{\alpha_i + \beta_i\}\cos(ig' - 2K)$$
$$+ \sin^2\tfrac{1}{2}I\sum_{-\infty}^{+\infty}\{\alpha_i + \beta_i\}\cos(ig' + 2N),$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 B = \cos^2\tfrac{1}{2}I\sum_{-\infty}^{+\infty}\{\alpha_i + \beta_i\}\sin(ig' - 2K)$$
$$- \sin^2\tfrac{1}{2}I\sum_{-\infty}^{+\infty}\{\alpha_i + \beta_i\}\sin(ig' + 2N).$$

Soit encore

$$R_i = -\frac{m'}{M+m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\{\alpha_i + \beta_i\};$$

alors il viendra

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega^\circ}{dx}\right) = \cos^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\cos(ig' - 2K) + \sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\cos(ig' + 2N),$$

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega^\circ}{dy}\right) = \cos^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(ig' - 2K) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\Sigma R_i\sin(ig' + 2N).$$

Pour abréger, j'ai supprimé ici la désignation des limites des sommes, car elles sont les mêmes que plus haut. Substituons maintenant ces expressions

des quotients différentiels de la fonction perturbatrice, dans l'expression de $\mathrm{T}dt$ donnée à la fin de l'art. 29, et posons

$$e = \sin\varphi,$$

il en résultera

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{T}dt}{du} = \; & \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-2u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v-u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + 3\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v-2u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + \tfrac{3}{2}\sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \sin\varphi(1+\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \sin\varphi(1+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v-u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+2u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + 3\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v+ig'-2\mathrm{K}) \\
& + \tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(2u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v+u+ig'-2\mathrm{K}) \\
& - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-2u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i(-v-u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& - 3\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+ig'+2\mathrm{N}) \\
& - \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v-2u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& - \tfrac{3}{2}\sin\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \sin\varphi(1+\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \sin\varphi(1+\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v-u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi(1+2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& - \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(-v+2u+ig'-2\mathrm{N}) \\
& - 3\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v+ig'+2\mathrm{N}) \\
& - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(2u+ig'+2\mathrm{N}) \\
& + \sin\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}\Sigma\mathrm{R}_i\sin(v+u+ig'+2\mathrm{N}).
\end{aligned}$$

On voit que la seconde moitié des termes de cette expression s'obtient au moyen de la première ; il faut seulement multiplier par $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{I}$ et changer les signes algébriques en changeant en même temps $-\mathrm{K}$ en N, $-v$ en v et

$-u$ en u. La multiplication par $\tang^2 \frac{1}{2} I$ est donc le seul calcul qu'exige la seconde moitié lorsque la première est déjà calculée. L'intégration s'exécutera selon les règles données dans le § IV. A la fin du calcul, on peut, par la méthode connue, réunir en un seul chaque couple de termes dont les arguments ne diffèrent que par $-2K$ et $2N$.

71. L'expression trouvée à l'article précédent pour Ω^0 donne

$$\left(\frac{d\Omega^0}{dH}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{r}{r'^3},$$

et, par suite de l'art. **20**,

$$\left(\frac{d\Omega^0}{dz}\right) = -\frac{m'}{M+m}\frac{a}{r'^3}\sin I \sin(f'+N-K);$$

cette expression, de même que celles des deux autres quotients différentiels de Ω^0, est indépendante des coordonnées de la comète. Si nous appliquons ici les coefficients α_i et β_i introduits dans l'article précédent, nous aurons

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \sin(f'+N-K) = \Sigma\{\alpha_i+\beta_i\}\sin(ig'+N-K),$$

les limites des sommes étant, comme plus haut, $-\infty$ et $+\infty$. Posons maintenant

$$M_i = -\frac{m'}{M+m}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\{\alpha_i+\beta_i\}\sin I,$$

il s'ensuit

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega^0}{dz}\right) = \Sigma M_i \sin(ig'+N-K);$$

nous aurons ainsi, au moyen des expressions (B) de l'art. **31**,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dp_i}{dt} &= -\tfrac{1}{2}\cos\varphi\Sigma M_i\cos(-u+ig'+N-K)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}\cos\varphi\Sigma M_i\cos(u+ig'+N-K),\\
\frac{1}{n\cos i}\cdot\frac{dq_i}{dt} &= -\tfrac{1}{2}\Sigma M_i\sin(-u+ig'+N-K)\\
&\quad+\sin\varphi\Sigma M_i\sin(ig'+N-K)\\
&\quad-\tfrac{1}{2}\Sigma M_i\sin(u+ig'+N-K).
\end{aligned}$$

Il faut remarquer que la lettre i, qui se trouve à gauche sous le signe cosinus, n'est point un indice, mais elle signifie l'inclinaison de l'orbite de la comète sur le plan fondamental.

Les expressions précédentes s'intégreront aussi d'après les règles du § IV; puis ensuite, au moyen des intégrales elles-mêmes, on calculera les pertur-

bations de la latitude à l'aide de l'expression (S) de l'art. 86, dans laquelle cependant on n'aura égard, pour le cas actuel, qu'au terme multiplié par $\sin(iu+i'g')$, lequel, sous le signe sinus, se change en $\sin(iu+i'g'+N-K)$.

72. Les coefficients α_i et β_i, introduits plus haut, peuvent être calculés de plusieurs manières; l'une d'elles est la suivante. En différentiant par rapport à g les équations

$$\frac{dr}{dg} = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{dr}{de} = -a\cos f,$$

à cause de $\frac{df}{dg} = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}$, il viendra

$$\frac{d^2r}{dg^2} = ae\cos f\frac{a^2}{r^2}, \quad \frac{d^2r}{de\,dg} = a\sin f\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2};$$

ainsi

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2\cos f = \frac{1}{ae}\frac{d^2r}{dg^2}, \quad \left(\frac{a}{r}\right)^2\sin f = \frac{1}{a\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{d^2r}{de\,dg}.$$

Le développement connu du rayon vecteur est

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 &- \left(e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 - \text{etc.}\right)\cos g \\ &- \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{16}e^6 - \text{etc.}\right)\cos 2g \\ &- \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 + \text{etc.}\right)\cos 3g - \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{2}{5}e^6 + \text{etc.}\right)\cos 4g \\ &- \left(\frac{125}{384}e^5 - \text{etc.}\right)\cos 5g - \left(\frac{27}{80}e^6 - \text{etc.}\right)\cos 6g - \text{etc.};\end{aligned}$$

donc, par suite des deux équations qui précèdent, on obtiendra, par la différentiation de cette dernière expression,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2 + \frac{5}{384}e^4 - \text{etc.}, \\ \alpha_2 &= e - \frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{8}e^5 - \text{etc.}, \\ \alpha_3 &= \frac{27}{16}e^2 - \frac{405}{256}e^4 + \text{etc.}, \\ \alpha_4 &= \frac{8}{3}e^3 - \frac{16}{5}e^5 + \text{etc.}, \\ \alpha_5 &= \frac{3125}{768}e^4 - \text{etc.} \\ \alpha_6 &= \frac{243}{40}e^5 - \text{etc.}, \\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

$$\beta_0 = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2 - \frac{11}{384}e^4 + \text{etc.},$$

$$\beta_2 = e - \frac{5}{6}e^3 + \frac{1}{12}e^5 - \text{etc.},$$

$$\beta_3 = \frac{27}{16}e^2 - \frac{459}{256}e^4 + \text{etc.},$$

$$\beta_4 = \frac{8}{3}e^3 - \frac{52}{15}e^5 + \text{etc.},$$

$$\beta_5 = \frac{3125}{768}e^4 - \text{etc.},$$

$$\beta_6 = \frac{243}{40}e^5 - \text{etc.},$$

etc.

Il est presque inutile de faire remarquer que, dans ces expressions, on doit employer l'excentricité de la planète, et que c'est pour plus de simplicité que j'ai écrit e au lieu de e'.

§ VII. — *Tables pour les transcendantes* I^i_λ.

Pour calculer la première des Tables qui suivent, on a fait usage des séries du § IV et du théorème de Taylor. Pour la première moitié de cette Table, je me suis servi des séries ordonnées d'après les puissances ascendantes de λ, et, pour la seconde moitié, de celles d'après les puissances descendantes. On n'a pas calculé ainsi toutes les transcendantes, mais seulement, à l'exception de la dernière partie de la Table, celles pour lesquelles λ est un nombre entier; les autres ont été calculées au moyen de celles-ci, à l'aide du théorème de Taylor. Si l'indice ou le module λ reçoit un accroissement x, on aura

$$\mathrm{I}^i_{\lambda+x} = \mathrm{I}^i_\lambda + \frac{d\mathrm{I}^i_\lambda}{d\lambda}\frac{x}{1} + \frac{d^2\mathrm{I}^i_\lambda}{d\lambda^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3\mathrm{I}^i_\lambda}{d\lambda^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Les expressions de cette transcendante données dans le § IV conduisent facilement à

$$\frac{d\mathrm{I}^i_\lambda}{d\lambda} = \mathrm{I}^{i-1}_\lambda - \mathrm{I}^{i+1}_\lambda,$$

$$\frac{d^2\mathrm{I}^i_\lambda}{d\lambda^2} = \mathrm{I}^{i-2}_\lambda - 2\mathrm{I}^i_\lambda + \mathrm{I}^{i+2}_\lambda,$$

$$\frac{d^3 I^i_\lambda}{d\lambda^3} = I^{i-3}_\lambda - 3I^{i-1}_\lambda + 3I^{i+1}_\lambda - I^{i+3}_\lambda,$$

etc., etc. ;

d'où l'on reconnaît que les quotients différentiels, par rapport à λ, de ces transcendantes comprises entre deux autres transcendantes quelconques, sont égaux respectivement à la différence finie de ces dernières relativement à i. Il faut remarquer ici que, lorsque i est un nombre pair, on a

$$I^{-i}_\lambda = I^i_\lambda,$$

et, lorsque i est un nombre impair,

$$I^{-i}_\lambda = - I^i_\lambda,$$

et de plus que, pour les différences d'ordre impair, il faut changer les signes algébriques; par exemple, pour $\lambda = 4$,

i.	I^i_4.	Δ.	$\Delta^{(2)}$.	$\Delta^{(3)}$.	$\Delta^{(4)}$.	$\Delta^{(5)}$.	$\Delta^{(6)}$.
−6	+0,3375760						
		−0,4429335					
−4	−0,1053575		+0,4352993				
		−0,0076342		−0,1430226			
−2	−0,1129917		+0,2922767		−0,718539		
		+0,2846425		−0,8615617		+2,441662	
0	+0,1716508		−0,5692850		+1,723123		−4,883324
		−0,2846425		+0,8615617		−2,441662	
2	−0,1129917		+0,2922767		−0,718539		
		+0,0076342		+0,1430226			
4	−0,1053575		+0,4352993				
		+0,4429335					
6	+0,3375760						

Nous obtenons ainsi immédiatement

$$\frac{dI^1_4}{d\lambda} = +\ 0,2846425, \qquad \frac{d^2 I^0_4}{d\lambda^2} = -\ 0,5692850,$$

$$\frac{d^3 I^1_4}{d\lambda^3} = -\ 0,8615617, \qquad \frac{d^4 I^0_4}{d\lambda^4} = +\ 1,723123,$$

$$\frac{d^5 I^1_4}{d\lambda^5} = +\ 2,441662, \qquad \frac{d^6 I^0_4}{d\lambda^6} = -\ 4,883324,$$

etc., etc.;

ensuite

i.	I'_i.	Δ.	$\Delta^{(2)}$.	$\Delta^{(3)}$.	$\Delta^{(4)}$.	$\Delta^{(5)}$.
− 5	−0,1857748					
		+0,4769071				
− 3	+0,2911323		−1,0026757			
		−0,5257686		+1,997717		
− 1	−0,2346363		+0,9950412		−3,987799	
		+0,4692726		−1,990082		+7,975598
1	+0,2346363		−0,9950412		+3,987799	
		−0,5257686		+1,997717		
3	−0,2911323		+1,0026757			
		+0,4769071				
5	+0,1857748					

d'où l'on tire immédiatement

$$\frac{dI^0_i}{d\lambda} = -\ 0,4692726, \qquad \frac{d^2I'_i}{d\lambda^2} = -\ 0,9950412,$$

$$\frac{d^3I^0_i}{d\lambda^3} = +\ 1,990082, \qquad \frac{d^4I'_i}{d\lambda^4} = +\ 3,987799,$$

$$\frac{d^5I^0_i}{d\lambda^5} = -\ 7,975598,$$

etc., etc.

Les transcendantes du commencement et de la fin de chaque subdivision de la seconde Table ont été calculées par les séries ascendantes qui convergent ici, presque dès leurs premiers termes, et à l'aide de l'équation de condition entre trois transcendantes consécutives quelconques; les autres transcendantes de cette Table ont été interpolées au moyen du théorème de Taylor.

Les colonnes intitulées a, b, c donnent les premiers, deuxièmes et troisièmes quotients différentiels de la transcendante en regard, respectivement divisés par 1, 2 et 6, et ramenés à l'accroissement de l'argument des Tables pris pour unité. Si donc on doit calculer ces transcendantes pour $\lambda = z$, et que α soit la valeur de λ la plus voisine de z dans la Table, si l'on désigne par h l'accroissement de cette Table, on aura

$$I'_z = I'_\alpha + a\frac{z-\alpha}{h} + b\left(\frac{z-\alpha}{h}\right)^2 + c\left(\frac{z-\alpha}{h}\right)^3,$$

ou bien, ce qui est un peu plus court pour le calcul,

$$I'_z = I'_\alpha + [a + (b + cy)y]y,$$

en écrivant y pour $\frac{z-\alpha}{h}$.

TABLE I.

λ	I^{0}_{λ}.	*a.*	*b.*	*c.*	I^{1}_{λ}.	*a.*	*b.*	*c.*
0,00	1	0	−2500	0	0	+ 50000	0	− 62
0,05	0,997502	− 4994	2491	+ 6	0,049938	49813	− 187	62
0,10	0,990025	9950	2463	12	0,099501	49252	373	61
0,15	0,977626	14832	2416	18	0,148319	48323	556	60
0,20	0,960398	19603	2352	24	0,196027	47033	733	58
0,25	0,938470	24227	2270	30	0,242268	45393	905	56
0,30	0,912005	28670	2171	36	0,286701	43417	1070	53
0,35	0,881201	32900	2056	41	0,328996	41121	1225	50
0,40	0,846287	36884	1925	46	0,368842	38523	1370	47
0,45	0,807524	40595	1782	50	0,405950	35647	1504	43
0,50	0,765198	44005	1626	54	0,440051	32515	1626	38
0,55	0,719622	47090	1458	58	0,470902	29153	1734	34
0,60	0,671133	49829	1279	61	0,498289	25589	1828	29
0,65	0,620085	52202	1093	63	0,522023	21853	1906	24
0,70	0,566855	54195	899	65	0,541948	17975	1969	18
0,75	0,511828	55794	699	67	0,557937	13987	2016	13
0,80	0,455402	56990	496	68	0,569896	9922	2046	7
0,85	0,397985	57776	291	69	0,577765	5812	2060	− 2
0,90	0,339986	58152	− 85	68	0,581517	+ 1692	2057	+ 4
0,95	0,281819	58116	+ 120	68	0,581157	− 2405	2038	9
1,00	0,223891	57672	322	67	0,576725	6447	2002	14
1,05	0,166607	56829	520	65	0,568292	10401	1950	19
1,10	0,110362	55596	712	63	0,555963	14235	1882	25
1,15	0,055540	53987	896	60	0,539873	17919	1800	30
1,20	+ 0,002508	52018	1071	57	0,520185	21424	1703	34
1,25	− 0,048384	49709	1236	53	0,497094	24722	1593	38
1,30	0,096805	47082	1389	49	0,470818	27789	1471	42
1,35	0,142449	44160	1530	45	0,441601	30601	1339	46
1,40	0,185036	40971	1657	40	0,409709	33136	1196	49
1,45	0,224312	37543	1769	35	0,375427	35377	1044	52
1,50	0,260052	33906	1866	29	0,339059	37307	885	54
1,55	0,292064	30092	1946	24	0,300921	38914	720	56
1,60	0,320188	26134	2009	18	0,261343	40186	551	57
1,65	0,344296	22066	2056	13	0,220663	41116	379	58
1,70	0,364296	17923	2085	7	0,179226	41701	205	58
1,75	0,380128	13738	2097	+ 1	0,137378	41938	− 32	58
1,80	0,391769	9547	2091	− 5	0,095466	41829	+ 141	57
1,85	0,399230	5383	2069	10	0,053834	41378	310	56
1,90	0,402556	− 1282	2030	16	+ 0,012821	40593	474	54
1,95	0,401826	+ 2724	1974	21	− 0,027244	39484	634	52

Suite de la Table I.

λ	I^0_λ.	a.	b.	c.	I^1_λ.	a.	b.	c.
2,00	− 0,397150	+ 6604	+1903	−26	− 0,066043	− 38064	+ 786	+ 49
2,05	0,388670	10327	1817	31	0,103273	36348	926	46
2,10	0,376557	13865	1718	35	0,138647	34354	1063	43
2,15	0,361011	17190	1605	39	0,171897	32103	1186	38
2,20	0,342257	20277	1481	43	0,202776	29617	1298	34
2,25	0,320543	23106	1346	47	0,231061	26920	1397	31
2,30	0,296138	25655	1202	49	0,256553	24037	1483	26
2,35	0,269331	27908	1050	52	0,279081	20995	1556	22
2,40	0,240425	29850	891	54	0,298500	17824	1613	17
2,45	0,209738	31469	728	55	0,314695	14552	1656	12
2,50	0,177597	32758	560	56	0,327579	11208	1685	7
2,55	0,144335	33710	391	56	0,337097	7824	1697	+ 2
2,60	0,110290	34322	221	56	0,343223	4429	1695	− 3
2,65	0,075803	34596	+ 53	56	0,345961	− 1053	1678	8
2,70	0,041210	34534	− 114	55	0,345345	+ 2274	1646	13
2,75	− 0,006844	34144	276	53	0,341438	5524	1601	18
2,80	+ 0,026971	33433	433	51	0,334313	8667	1541	22
2,85	0,059920	32415	584	49	0,324148	11679	1468	26
2,90	0,091703	31103	727	46	0,311028	14533	1384	30
2,95	0,122033	29514	860	43	0,295143	17206	1288	34
3,00	0,150545	27668	984	39	0,276684	19676	1181	37
3,05	0,177291	25586	1096	35	0,255865	21924	1065	40
3,10	0,201747	23292	1197	31	0,232917	23931	941	42
3,15	0,223812	20809	1284	27	0,208087	25684	810	44
3,20	0,243311	18164	1358	22	0,181638	27169	674	46
3,25	0,260095	15384	1419	18	0,153841	28376	533	47
3,30	0,274043	12498	1465	13	0,124980	29298	388	48
3,35	0,285065	9534	1497	8	0,095342	29929	243	49
3,40	0,293096	6522	1513	− 3	0,065219	30269	+ 96	49
3,45	0,298102	3490	1516	+ 2	0,034902	30316	− 49	48
3,50	0,300079	+ 468	1504	6	− 0,004683	30075	192	47
3,55	0,299051	− 2515	1478	11	+ 0,025153	29551	331	46
3,60	0,295071	5433	1438	15	0,054327	28753	466	44
3,65	0,288217	8257	1384	20	0,082571	27691	595	42
3,70	0,278596	10962	1319	24	0,109625	26378	716	39
3,75	0,266340	13525	1242	28	0,135248	24830	830	36
3,80	0,251602	15921	1153	31	0,159214	23067	934	33
3,85	0,234559	18131	1055	34	0,181313	21101	1028	30
3,90	0,215408	20136	948	37	0,201357	18959	1112	26
3,95	0,194362	21918	813	39	0,219179	16662	1184	22

Suite de la Table I.

λ	I^0_λ.	*a*.	*b*.	*c*.	I^1_λ.	*a*.	*b*.	*c*.
4,00	+ 0,171651	−23464	− 712	+41	+ 0,234636	+ 14232	−1244	− 18
4,05	0,147518	24761	585	43	0,247607	11695	1291	14
4,10	0,122216	25800	454	44	0,257998	9075	1326	9
4,15	0,096006	26574	320	45	0,265739	6399	1348	5
4,20	0,069158	27079	185	45	0,270786	3692	1357	− 1
4,25	0,041939	27312	− 49	45	0,273121	+ 981	1352	+ 4
4,30	+ 0,014623	27275	+ 86	44	0,272754	− 1709	1335	8
4,35	− 0,012523	26972	218	43	0,269719	4352	1306	12
4,40	0,039234	26407	346	42	0,264073	6924	1264	16
4,45	0,065253	25590	470	40	0,255902	9401	1211	20
4,50	0,090334	24531	588	38	0,245312	11759	1146	23
4,55	0,114239	23243	699	36	0,232430	13978	1071	26
4,60	0,136748	21741	802	33	0,217408	16038	987	30
4,65	0,157655	20041	896	30	0,200414	17921	894	32
4,70	0,176772	18163	980	26	0,181632	19609	794	34
4,75	0,193929	16126	1055	23	0,161264	21090	686	36
4,80	0,208979	13953	1118	19	0,139525	22351	574	38
4,85	0,221796	11664	1169	15	0,116639	23382	456	39
4,90	0,232276	9284	1209	11	0,092840	24175	336	40
4,95	0,240341	6837	1236	7	0,068370	24725	213	41
5,00	0,245936	4347	1251	+ 3	0,043473	25028	− 90	41
5,05	0,249030	− 1840	1254	− 1	+ 0,018396	25085	+ 33	41
5,10	0,249617	+ 661	1245	5	− 0,006616	24897	155	40
5,15	0,247717	3132	1223	9	0,031318	24468	274	39
5,20	0,243372	5547	1191	13	0,055473	23804	389	37
5,25	0,236648	7885	1146	17	0,078850	22914	500	36
5,30	0,227635	10123	1090	20	0,101229	21808	605	34
5,35	0,216443	12240	1025	23	0,122399	20500	702	31
5,40	0,203202	14217	950	26	0,142166	19004	793	29
5,45	0,188062	16035	867	29	0,160350	17335	875	26
5,50	0,171190	17679	776	32	0,176785	15512	947	23
5,55	0,152768	19133	678	34	0,191328	13553	1010	19
5,60	0,132992	20385	574	35	0,203853	11479	1062	16
5,65	0,112069	21426	466	37	0,214255	9311	1104	12
5,70	0,090215	22245	353	38	0,222450	7070	1135	8
5,75	0,067654	22838	239	38	0,228379	4780	1154	4
5,80	0,044616	23200	123	39	0,232000	2462	1162	+ 1
5,85	− 0,021332	23330	+ 7	39	0,233300	− 139	1159	− 3
5,90	+ 0,001967	23228	− 108	38	0,232285	+ 2165	1144	7
5,95	0,025049	22898	221	37	0,228983	4429	1118	10

Suite de la Table I.

λ.	I_λ^0.	*a.*	*b.*	*c.*	I_λ^1.	*a.*	*b.*	*c.*
6,00	+ 0,047689	+22345	— 332	—36	— 0,223447	+ 6631	+1082	— 14
6,05	0,069667	21575	437	34	0,215749	8750	1035	17
6,10	0,090770	20598	538	32	0,205982	10765	979	20
6,15	0,110798	19426	633	30	0,194259	12659	913	23
6,20	0,129561	18071	721	28	0,180710	14413	839	26
6,25	0,146884	16548	801	25	0,165484	16012	758	28
6,30	0,162607	14874	872	22	0,148742	17441	670	30
6,35	0,176588	13066	934	19	0,130662	18685	576	32
6,40	0,188701	11143	987	16	0,111432	19741	477	34
6,45	0,198843	9125	1030	12	0,091248	20592	374	35
6,50	0,206926	7032	1062	9	0,070318	21234	268	36
6,55	0,212888	4885	1083	5	0,048853	21662	160	36
6,60	0,216686	2707	1094	— 2	0,027067	21874	+ 52	36
6,65	0,218298	+ 518	1094	+ 2	— 0,005177	21869	— 57	36
6,70	0,217725	— 1660	1083	5	+ 0,016599	21649	163	35
6,75	0,214989	3805	1061	9	0,038049	21217	268	34
6,80	0,210133	5896	1029	12	0,058965	20580	369	33
6,85	0,203221	7914	987	15	0,079143	19744	466	31
6,90	0,194336	9839	936	18	0,098391	18721	557	29
6,95	0,183580	11653	876	21	0,116525	17520	643	27
7,00	0,171073	13338	808	24	0,133375	16155	721	25
7,05	0,156953	14878	732	26	0,148784	14640	792	22
7,10	0,141369	16261	650	28	0,162611	12992	855	19
7,15	0,124488	17473	561	30	0,174729	11227	909	16
7,20	0,106484	18503	468	32	0,185032	9363	953	13
7,25	0,087545	19343	371	33	0,193429	7421	988	10
7,30	0,067864	19985	271	34	0,199853	5418	1013	6
7,35	0,047642	20425	169	34	0,204251	3375	1028	— 3
7,40	0,027082	20659	— 66	34	0,206596	+ 1312	1033	0
7,45	+ 0,006392	20688	+ 37	34	0,206876	— 749	1027	+ 3
7,50	— 0,014224	20510	139	34	0,205104	2790	1012	7
7,55	0,034462	20131	239	33	0,201310	4789	986	10
7,60	0,054421	19555	336	32	0,195545	6729	951	13
7,65	0,073608	18788	429	30	0,187879	8589	907	16
7,70	0,091936	17840	518	28	0,178400	10352	855	19
7,75	0,109231	16721	600	26	0,167213	12002	794	21
7,80	0,125326	15444	676	24	0,154440	13523	726	24
7,85	0,140070	14022	745	22	0,140216	14900	651	26
7,90	0,153326	12469	806	19	0,124691	16122	570	28
7,95	0,164971	10803	859	16	0,108028	17177	484	29

Suite de la Table I.

λ.	I^0_λ.	a.	b.	c.	I^1_λ.	a.	b.	c.
8,00	− 0,174899	− 9040	+ 903	+13	+ 0,090397	−18055	− 394	+ 31
8,05	0,183024	7198	937	10	0,071979	18749	300	32
8,10	0,189275	5296	963	7	0,052962	19254	204	32
8,15	0,193603	3354	978	+ 4	0,033535	19566	107	32
8,20	0,195975	− 1389	984	0	+ 0,013895	19682	− 9	33
8,25	0,196381	+ 577	980	− 3	− 0,005764	19603	+ 88	32
8,30	0,194828	2525	966	6	0,025247	19331	184	32
8,35	0,191344	4436	943	9	0,044362	18869	278	31
8,40	0,185974	6292	911	12	0,062923	18223	368	29
8,45	0,178783	8075	870	15	0,080749	17401	454	28
8,50	0,169854	9767	821	18	0,097669	16411	535	26
8,55	0,159285	11352	763	20	0,113519	15265	610	24
8,60	0,147191	12815	699	23	0,128150	13974	679	22
8,65	0,133701	14142	628	25	0,141423	12553	741	19
8,70	0,118956	15322	551	26	0,153216	11015	795	17
8,75	0,103110	16342	469	28	0,163420	9377	841	14
8,80	0,086328	17194	383	29	0,171943	7656	879	11
8,85	0,068780	17871	293	30	0,178710	5868	907	8
8,90	0,050646	18366	202	31	0,183663	4033	927	5
8,95	0,032109	18677	108	31	0,186765	2168	937	+ 2
9,00	− 0,013356	18799	+ 15	31	0,187995	− 291	938	− 1
9,05	+ 0,005427	18735	− 79	31	0,187350	+ 1578	930	4
9,10	0,024052	18485	171	30	0,184848	3421	912	7
9,15	0,042336	18052	261	29	0,180523	5220	886	10
9,20	0,060098	17443	348	28	0,174428	6958	851	13
9,25	0,077165	16663	431	27	0,166634	8617	808	16
9,30	0,093371	15722	509	25	0,157225	10182	757	18
9.35	0,108560	14630	582	23	0,146305	11638	698	20
9,40	0,122585	13399	649	21	0,133990	12971	634	22
9,45	0,135315	12041	708	19	0,120408	14169	563	24
9,50	0,146630	10570	761	16	0,105702	15219	487	26
9,55	0,156423	9002	806	14	0,090022	16114	407	27
9,60	0,164607	7353	842	11	0,073529	16844	323	28
9,65	0,171107	5639	870	8	0,056391	17403	236	29
9,70	0,175869	3878	889	5	0,038782	17787	148	29
9,75	0,178854	2088	900	− 2	0,020827	17992	+ 58	30
9,80	0,180041	+ 286	901	+ 1	− 0,002857	18019	− 32	30
9,85	0,179427	− 1510	893	4	+ 0,015101	17866	121	29
9,90	0,177029	3282	877	7	0,032817	17537	208	29
9,95	0,172878	5012	852	10	0,050117	17036	293	28
10,00	+ 0,167025	− 6683	− 818	+12	+ 0,066833	+16368	− 374	− 26

TABLE II.

λ.	I_λ^5.	a.	b.	c.	λ.	I_λ^6.	a.	b.	c.
0,0	0,0000000	0	0	0	0,0	0,0000000	0	0	0
0,1	0,0000001	+ 1	+ 8	+ 12	0,1	0,0000000	0	0	+ 1
0,2	0,0000026	65	66	36	0,2	0,0000001	+ 2	+ 3	3
0,3	0,0000199	330	218	74	0,3	0,0000010	19	17	8
0,4	0,0000831	1027	504	123	0,4	0,0000056	82	50	18
0,5	0,0002498	2456	953	180	0,5	0,0000209	247	122	33
0,6	0,0006101	4961	1584	241	0,6	0,0000615	604	245	53
0,7	0,0012901	8910	2397	299	0,7	0,0001523	1275	438	79
0,8	0,0024523	14663	3384	352	0,8	0,0003321	2414	717	110
0,9	0,0042937	22540	4514	394	0,9	0,0006569	4207	1095	144
1,0	0,0070396	32793	5752	423	1,0	0,0012024	6865	1581	182

λ.	I_λ^8.	a.	b.	c.	λ.	I_λ^9.	a.	b.	c.
1,0	0,0000222	+ 174	+ 58	+ 8	1,0	0,0000025	+ 22	+ 9	+ 1
1,1	0,0000464	327	99	16	1,1	0,0000058	46	15	3
1,2	0,0000908	580	159	25	1,2	0,0000123	89	28	5
1,3	0,0001674	980	246	34	1,3	0,0000246	164	48	8
1,4	0,0002937	1584	364	46	1,4	0,0100467	287	77	12
1,5	0,0004934	2463	522	60	1,5	0,0000844	481	119	17
1,6	0,0007983	3699	721	75	1,6	0,0001462	774	177	23
1,7	0,0012483	5386	974	93	1,7	0,0002438	1205	258	31
1,8	0,0018940	7631	1280	111	1,8	0,0003934	1821	362	40
1,9	0,0027967	10544	1642	130	1,9	0,0006160	2675	497	51
2,0	0,0040287	14237	2061	149	2,0	0,0009386	3834	667	62

λ.	I_λ^{11}.	a.	b.	c.	λ.	I_λ^{12}.	a.	b.	c.
2,0	0,0000366	+ 189	+ 43	+ 3	2,0	0,0000062	+ 36	+ 9	+ 2
2,1	0,0000604	296	64	7	2,1	0,0000109	59	14	2
2,2	0,0000372	449	91	11	2,2	0,0000184	94	22	3
2,3	0,0001524	668	129	15	2,3	0,0000303	147	33	4
2,4	0,0002337	974	178	19	2,4	0,0000486	224	47	6
2,5	0,0003509	1392	242	24	2,5	0,0000763	335	65	8
2,6	0,0005168	1952	321	30	2,6	0,0001172	492	92	10
2,7	0,0007473	2691	421	37	2,7	0,0001767	709	126	13
2,8	0,0010613	3650	542	45	2,8	0,0002616	1003	170	17
2,9	0,0014861	4876	688	53	2,9	0,0003807	1397	226	21
3,0	0,0020480	6419	860	61	3,0	0,0005452	1915	295	25

Suite de la Table II.

λ.	I^{13}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.	λ.	I^{14}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.
3,0	0,0001327	+ 515	+ 89	+ 7	3,0	0,0000297	+ 127	+ 24	+ 3
3,1	0,0001941	725	121	11	3,1	0,0000451	185	34	4
3,2	0,0002798	1002	159	15	3,2	0,0000674	265	47	5
3,3	0,0003974	1367	208	19	3,3	0,0000991	375	64	6
3,4	0,0005569	1842	268	23	3,4	0,0001436	522	85	8
3,5	0,0007702	2450	343	27	3,5	0,0002052	720	114	10
3,6	0,0010523	3221	431	32	3,6	0,0002896	979	148	13
3,7	0,0014209	4185	536	38	3,7	0,0004035	13[illegible]	191	16
3,8	0,0018970	5379	661	45	3,8	0,0005557	1747	243	19
3,9	0,0025055	6839	803	51	3,9	0,0007567	2295	307	23
4,0	0,0032749	8604	967	58	4,0	0,0010193	2982	383	28

λ.	I^{15}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.	λ.	I^{16}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.
4,0	0,0002926	+ 941	+ 135	+ 11	4,0	0,0000780	+ 273	+ 43	+ 4
4,1	0,0004015	1248	173	14	4,1	0,0001101	373	57	5
4,2	0,0005451	1639	219	17	4,2	0,0001537	504	75	7
4,3	0,0007327	2131	275	20	4,3	0,0002123	675	97	8
4,4	0,0009754	2744	340	24	4,4	0,0002904	895	123	10
4,5	0,0012864	3501	418	28	4,5	0,0003933	1174	157	12
4,6	0,0016813	4427	510	33	4,6	0,0005277	1527	197	15
4,7	0,0021784	5550	615	37	4,7	0,0007017	1968	245	18
4,8	0,0027987	6896	734	43	4,8	0,0009248	2514	303	21
4,9	0,0035661	8497	871	49	4,9	0,0012087	3185	370	24
5,0	0,0045080	10390	1023	56	5,0	0,0015668	4002	449	27

λ.	I^{17}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.	λ.	I^{18}_λ.	*a*.	*b*.	*c*.
5,0	0,0001524	+ 463	+ 64	+ 5	5,0	0,0000431	+ 141	+ 21	+ 2
5,1	0,0002056	606	81	6	5,1	0,0000596	189	27	3
5,2	0,0002750	789	103	8	5,2	0,0000815	252	36	3
5,3	0,0003650	1019	128	9	5,3	0,0001106	333	46	4
5,4	0,0004806	1304	159	11	5,4	0,0001489	437	58	5
5,5	0,0006281	1658	195	13	5,5	0,0001990	569	73	6
5,6	0,0008148	2091	239	16	5,6	0,0002638	734	93	7
5,7	0,0010494	2619	291	19	5,7	0,0003472	942	116	8
5,8	0,0013423	3259	350	21	5,8	0,0004538	1199	142	10
5,9	0,0017054	4026	418	24	5,9	0,0005889	1514	175	12
6,0	0,0021522	4939	497	27	6,0	0,0007590	1901	213	14

Suite de la Table II.

λ.	I_λ^{20}.	*a.*	*b.*	*c.*	λ.	I_λ^{21}.	*a.*	*b.*	*c.*
6,0	0,0002512	+ 681	+ 84	+ 7	6,0	0,0000784	+ 228	+ 30	+ 2
6,1	0,0003283	867	103	8	6,1	0,0001045	297	39	3
6,2	0,0004261	1098	128	9	6,2	0,0001384	384	48	4
6,3	0,0005496	1381	156	10	6,3	0,0001820	492	61	5
6,4	0,0007044	1725	189	12	6,4	0,0002378	628	75	6
6,5	0,0008971	2143	230	14	6,5	0,0003087	796	94	6
6,6	0,0011358	2645	274	16	6,6	0,0003984	1004	115	8
6,7	0,0014294	3245	327	19	6,7	0,0005111	1257	139	9
6,8	0,0017885	3957	386	22	6,8	0,0006517	1564	169	11
6,9	0,0022250	4796	455	25	6,9	0,0008261	1935	204	13
7,0	0,0027527	5782	532	28	7,0	0,0010413	2381	241	15

λ.	I_λ^{23}.	*a.*	*b.*	*c.*	λ.	I_λ^{24}.	*a.*	*b.*	*c.*
7,0	0,0001252	+ 331	+ 40	+ 3	7,0	0,0000402	+ 113	+ 15	+ 1
7,1	0,0001626	420	50	4	7,1	0,0000531	146	18	2
7,2	0,0002100	532	62	4	7,2	0,0000697	188	23	2
7,3	0,0002698	669	75	5	7,3	0,0000910	240	29	2
7,4	0,0003447	834	91	6	7,4	0,0001182	306	36	3
7,5	0,0004379	137	112	7	7,5	0,0001527	387	45	3
7,6	0,0005536	1283	134	8	7,6	0,0001963	488	55	4
7,7	0,0006962	1577	161	10	7,7	0,0002510	610	67	5
7,8	0,0008710	1929	192	11	7,8	0,0003192	760	82	5
7,9	0,0010843	2349	228	13	7,9	0,0004040	942	99	6
8,0	0,0013433	2845	269	15	8,0	0,0005087	1160	120	6

λ.	I_λ^{25}.	*a.*	*b.*	*c.*	λ.	I_λ^{26}.	*a.*	*b.*	*c.*
8,0	0,0001828	+ 446	+ 50	+ 3	8,0	0,0000625	+ 162	+ 20	+ 1
8,1	0,0002328	557	61	4	8,1	0,0000808	206	24	2
8,2	0,0002950	691	73	5	8,2	0,0001040	260	30	2
8,3	0,0003719	853	90	6	8,3	0,0001332	326	37	3
8,4	0,0004668	1050	107	6	8,4	0,0001698	408	45	3
8,5	0,0005832	1284	128	7	8,5	0,0002154	507	55	4
8,6	0,0007252	1564	152	9	8,6	0,0002720	628	66	4
8,7	0,0008977	1896	181	10	8,7	0,0003419	774	80	5
8,8	0,0011064	2288	212	11	8,8	0,0004278	949	95	6
8,9	0,0013575	2747	249	13	8,9	0,0005328	1158	115	7
9,0	0,0016585	3286	290	15	9,0	0,0006608	1408	136	8

Suite de la Table II.

λ.	I_λ^{27}.	*a.*	*b.*	*c.*	λ.	I_λ^{28}.	*a.*	*b.*	*c.*
9,0	0,0002505	+ 570	+ 59	+ 4	9,0	0,0000906	+ 219	+ 24	+ 1
9,1	0,0003138	701	72	4	9,1	0,0001151	274	30	1
9,2	0,0003915	858	86	5	9,2	0,0001457	340	36	2
9,3	0,0004864	1045	102	6	9,3	0,0001835	420	44	3
9,4	0,0006017	1268	121	7	9,4	0,0002302	518	54	3
9,5	0,0007413	1531	143	8	9,5	0,0002877	635	64	4
9,6	0,0009095	1842	169	9	9,6	0,0003580	775	76	5
9,7	0,0011115	2207	197	10	9,7	0,0004436	942	91	5
9,8	0,0013529	2632	229	11	9,8	0,0005475	1141	108	6
9,9	0,0016402	3127	267	13	9,9	0,0006731	1377	128	7
10,0	0,0019809	3700	307	15	10,0	0,0008243	1654	150	8

FIN.

ERRATA.

Dans le § III (depuis l'art. 20 jusqu'à l'art. 37, pages 71 à 87), on a écrit partout ν et ν_1 à la place de v et v_1; il faut rétablir cette dernière notation pour la mettre en harmonie avec celle des art. 52 et suivants.

Page 122, lignes 22 et 25, *au lieu de* $\left(\frac{d\overline{W}}{d\nu}\right)$, *lisez* $\left(\frac{d\overline{W}}{dv}\right)$.

12

